جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قوانين اشتقاق معكوس الدوال المثلثية

Inverse Sine, Inverse cosine, Inverse tangent, Alternate Notation

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

16) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$

17) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

18) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)^2}$ حيث n عدد طبيعي.

19) $\int x(1+x)^2 dx$

20) $\int_1^2 (6-x)^{-3} dx$

21)

$\int (2ax+b)(ax^2+bx+c)dx$

22) $\int x\sqrt{x+1}dx$

23) $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx$

24) $\int x\sqrt{2x-1}dx$.

25) $\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx^n}}$

26) إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق، وكانت f دالة متصلة، برهن أن:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f(g(x)g'(x)$$

27) استخدم نتيجة التمرين (26) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x+t^2}}$$

28) إذا كانت g_1, g_2 دالتين قابلتين للاشتقاق، وكانت f دالة متصلة، برهن أن:

$$\frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x)$$

29) استخدم نتيجة التمرين (28) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{1+x} \frac{t-1}{t}dt$$

30) استخدم نتيجة التمرين (28) لحساب:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

الفصل السابع

الدوال الأسية واللوغاريتمية
The Exponential and Logarithmic Functions

1.7 معكوس الدالة

لنفرض أن $f(x) = 2x + 3$ ومعنى ذلك أن $y = 2x + 3$.

نستطيع كتابة x بدلالة y كالآتي: $x = \frac{y-3}{2}$.

الدالتان $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = \frac{x+3}{2}$ إحداهما معكوسة الأخرى.

تعريف 1.7

الدالتان f وg كل منهما معكوس الأخرى إذا كان:

أ) لكل x في نطاق g يكون $(f \circ g)x = f(g(x)) = x$ و

ب) لكل x في نطاق f يكون $(g \circ f)x = g(f(x)) = x$.

في هذه الحالة نكتب $f = g^{-1}$ أو $g = f^{-1}$ ونقول إن g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g.

كيفية إيجاد الدالة العكسية

1) نكتب $y = f(x)$.
2) نكتب x دالة في y، وذلك بتغيير المتغيرين x وy.
3) نقوم بعملية تحليل للحصول على y كدالة في x.
4) $y = f^{-1}(x)$.

مثال 1

أوجد معكوس الدالة للدالة $f(x) = x^3$.

الحل

$x = y^3$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \Longleftarrow y = \sqrt[3]{x} \Longleftarrow x = y^3$$

للتأكد من العمل، نتحقق من أن $(f \circ f^{-1})x = x$ ، $(f^{-1} \circ f)x = x$.

تعريف 2.7

الدالة f دالة أحادية (One-to-one)، على $[a,b]$ إذا كان x_1 وx_2 في الفترة $[a,b]$ و $f(x_1) = f(x_2)$ يؤدي إلى أن $x_1 = x_2$.

نستطيع صياغة هذا التعريف بصورة أخرى، وهي أن الدالة f دالة أحادية على الفترة $[a,b]$ إذا كان $x_1, x_2 \in [a,b]$ و $x_1 \neq x_2$ يؤدي إلى أن $f(x_1) \neq f(x_2)$.

نظرية 1

إذا كانت الدالة f تزايدية أو تناقصية على $[a,b]$، فإن f تكون دالة أحادية.

نظرية 2

إذا كانت الدالة f متصلة على $[a,b]$ ولها اشتقاق $f'(x) \neq 0$، لكل $x \in (a,b)$، فإن f تكون دالة أحادية.

البرهان

لنفرض أن $x_1, x_2 \in [a,b]$ حيث $x_1 \neq x_2$ ولكن $f(x_1) = f(x_2)$.

الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة الوسطى على $[x_1, x_2]$.

إذن يوجد $c \in (x_1, x_2)$؛ حيث إن:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$$

حيث إن $x_2 - x_1 \neq 0$، فإن $f'(c) = 0$، وهذا يناقض الفرض $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$.

إذن إذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $f(x_1) \neq f(x_2)$، وهذا يعني أن الدالة أحادية.

عكس هذه النظرية ليس صحيحاً: فهناك دوال أحادية لا تحقق الشرط $f'(x) \neq 0$، مثال ذلك $f(x) = x^3$ على $[-1,1]$ هي دالة أحادية، ولكن $f'(0) = 0$.

نظرية 3
إذا كانت الدالة f أحادية، فإن f^{-1} موجودة والعكس.

نظرية 4
إذا كانت f متصلة على $[a, b]$، فإن f^{-1} دالة متصلة على $[f(a), f(b)]$ أو على $[f(b), f(a)]$ إذا كان $(f(a) > f(b))$.

نظرية 5 (اشتقاق معكوس الدالة)
إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على (a, b) و $f'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a, b)$، فإن f^{-1} موجودة وقابلة للاستقاق على (a, b) و

$$(f^{-1})'(x) = \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

لكل x في نطاق f^{-1}.

مثـال 2

إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$، فأوجد $(f^{-1})'(x)$.

الحـل

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

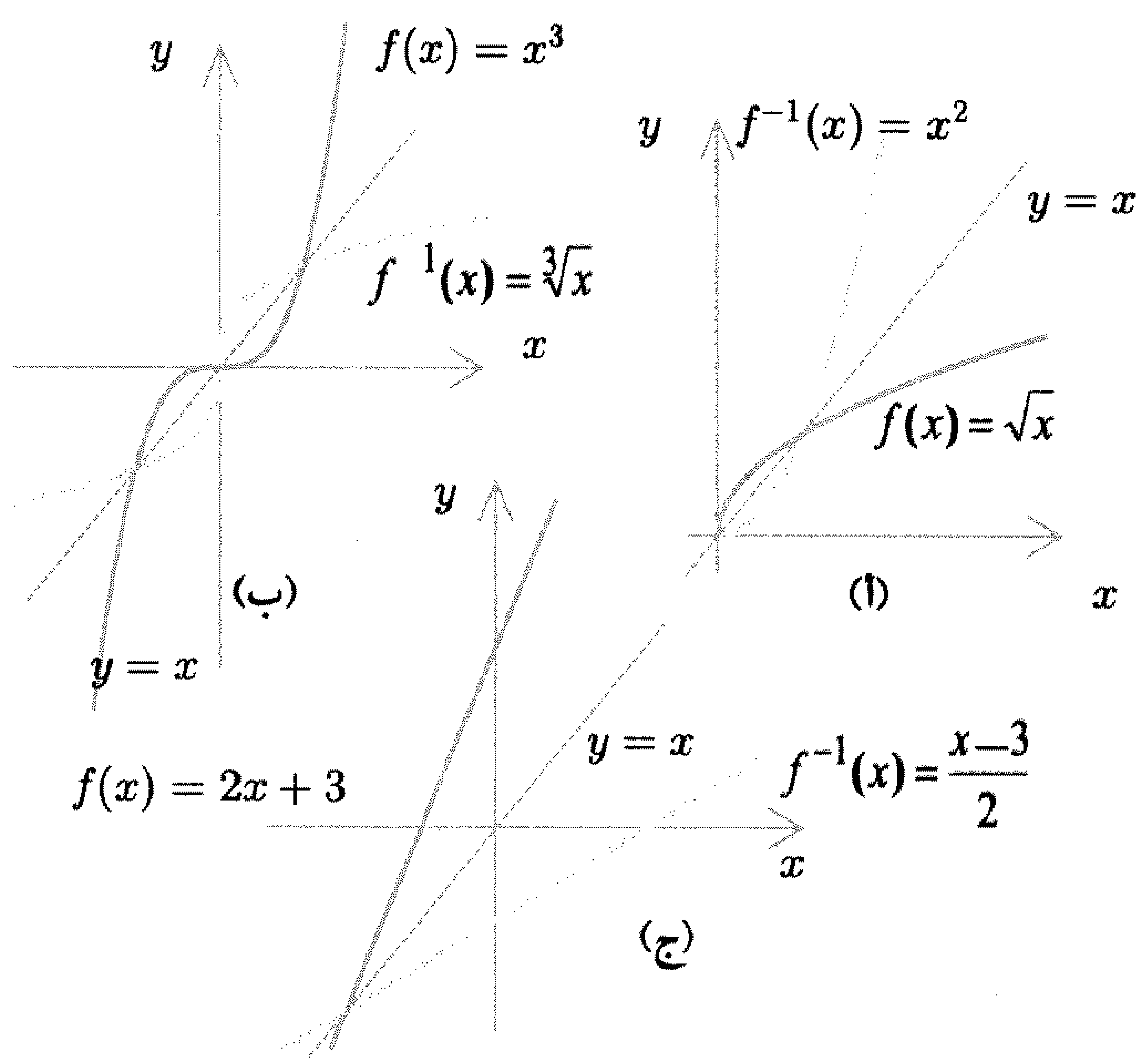
$$f^{-1}(x) = x^2$$

$$f'(f^{-1}(x)) = f'(x^2) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} = \frac{1}{2x}$$

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1/(2x)} = 2x$$

إذا كانت $y=f(x)$، وإذا وجدت f^{-1}، فإن $x=f^{-1}(y)$، ولهذا فإن النقطة (x,y) على بيان الدالة f إذا كانت (y,x) على بيان الدالة f^{-1}، والعكس.

رسم الدالتين f و f^{-1} يبيّن أن إحداهما انعكاس للأخرى حول المستقيم $x=y$.



الشكل 1.7

تمارين 1.7

في التمارن التالية حدد ما إذا كانت الدالة أحادية، وإذا كانت غير ذلك، حدد الفترة التي تكون عليها أحادية، ثم أوجد معكوس الدالة والمشتقة الأولى لمعكوس الدالة:

(1 $f(x) = 3x + 5$

(2 $f(x) = \frac{1}{2}$

(3 $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(4 $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(5 $f(x) = 1 - x^3$

(6 $f(x) = (x+1)^2$

(7 $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

(8 $y = x^2 - 5x + 6$

(9 $y = x^3 + x$

(10 $y = x^2 + 2x + 2$

2.7 الدالة الأسية (Exponential Function)

لنفرض أن a عدد موجب.

الدالة الأسية هي الدالة التي على الشكل: $f(x) = a^x$ عندما $x \in \mathbb{R}$.

ملاحظات

1) $a^n = \underbrace{a\ a\ a \dots a}_{\text{مرة } n}$

2) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

4) $a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

5) إذا كان $a > 0$، فإن $a^x > 0$ لأي عدد حقيقي x.

6) $a^{x+y} = a^x.a^y$.

7) $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$.

8) $a^0 = 1$.

9) $(a^x)^y = a^{xy}$.

10) إذا كان $a > 1$، فإن a^x دالة تزايدية.

11) إذا كان $0 < a < 1$، فإن a^x دالة تناقصية.

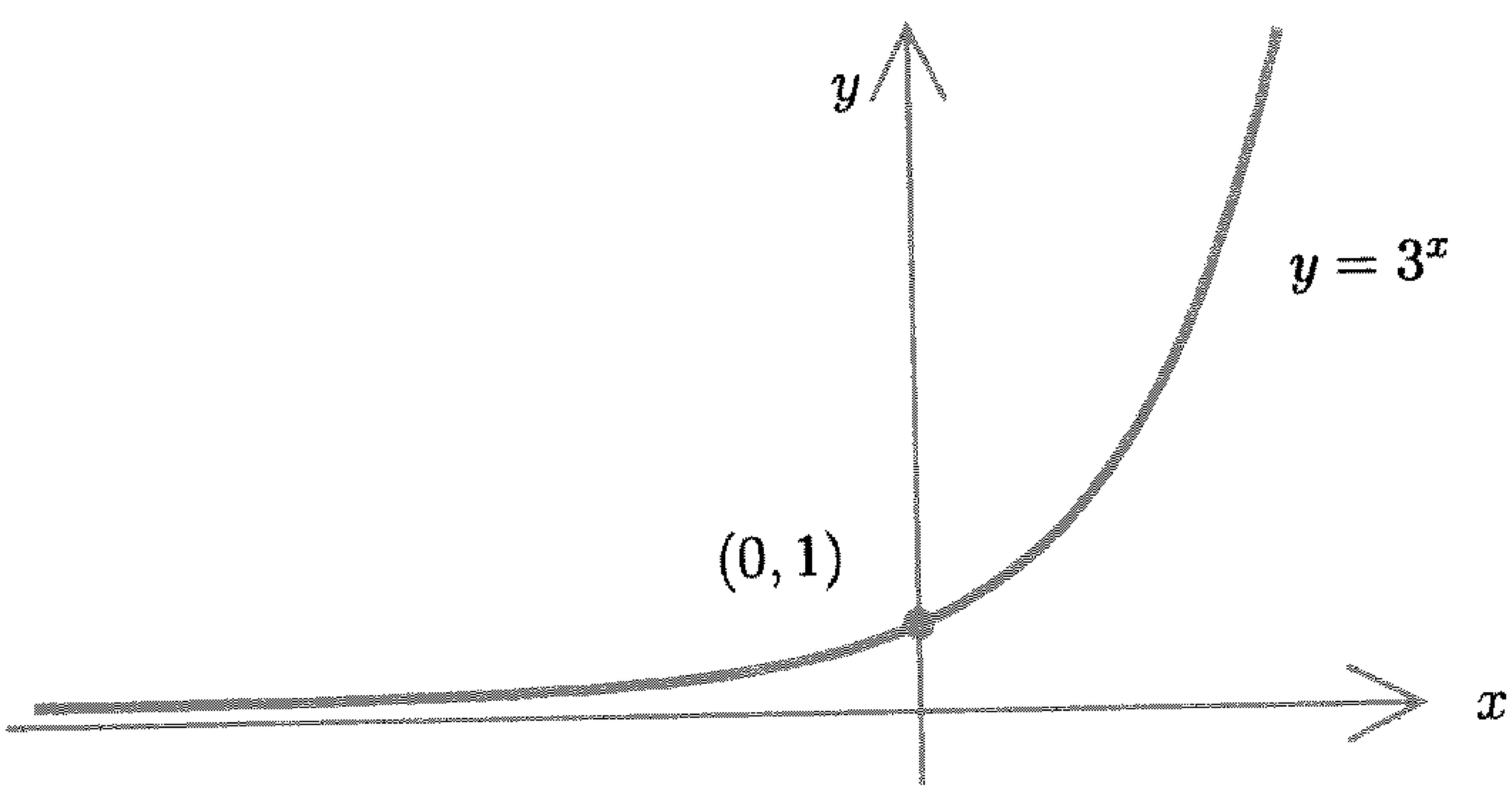
12) a^x دالة متصلة لأي x.

13) إذا كان $a = 1$، فإن $a^x = 1$ لكل x.

مثال 3

أعط بياناً للدالة $y = 3^x$.

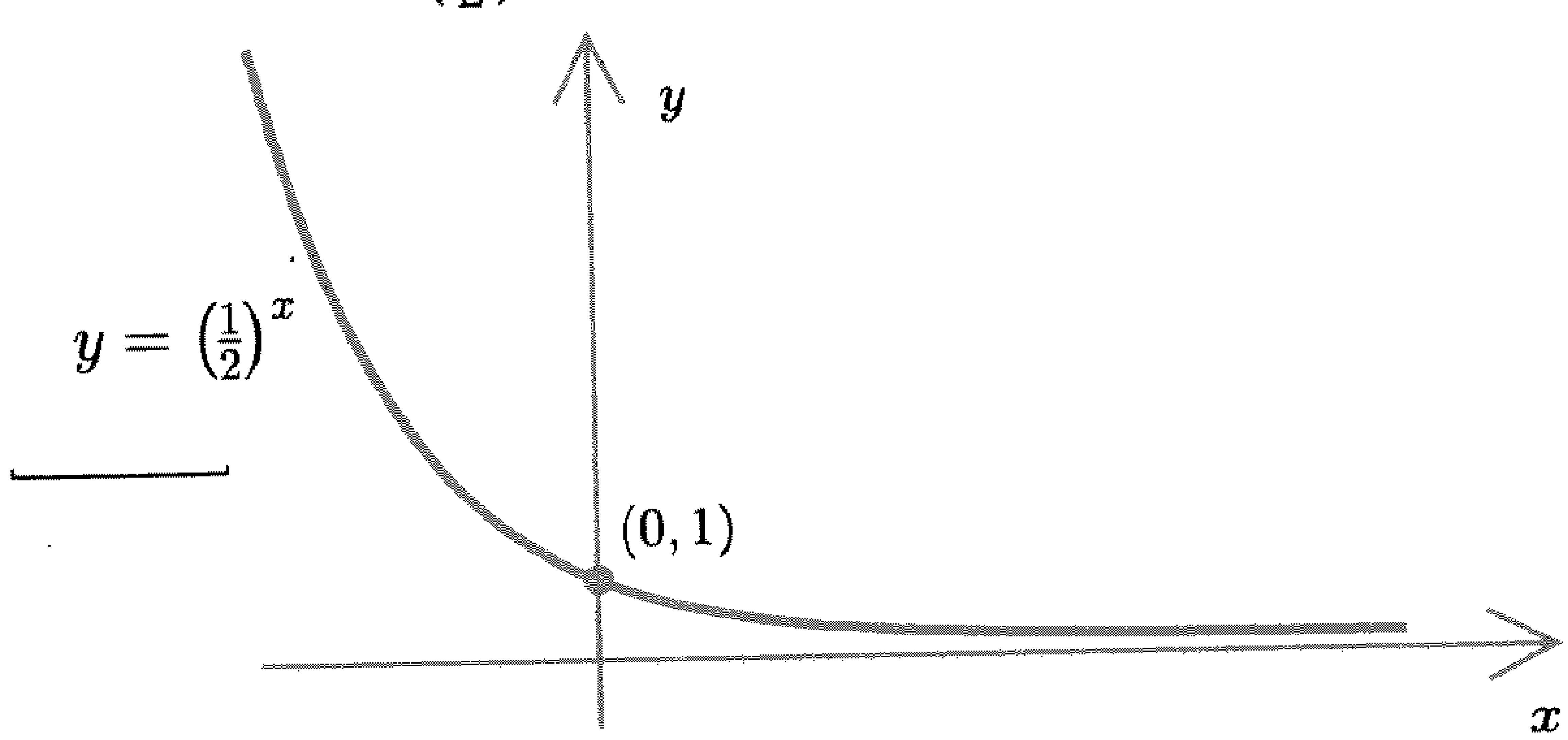
من البيان نلاحظ أن الدالة $y = 3^x$ دالة تزايدية.



الشكل 2.7

مثال 4

أعط بياناً للدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. من البيان نلاحظ أن الدالة $y\left(\frac{1}{2}\right)^x$ دالة تناقصية.



الشكل 3.7

من الملاحظات عرفنا أن الدالة $f(x) = a^x$ إما تزايدية $(a > 1)$، أو تناقصية $(0 < a < 1)$. ولذلك، فإن الدالة $f(x) = a^x$ دالة أحادية إذا كان $a \neq 1$ و$a > 0$.

نظرية 6

إذا كان $a \neq 1$ و$a > 0$، فإن الدالة $f(x) = a^x$ لها معكوس.

تمارين 2.7

في التمارين من 1 إلى 10 أعط بياناً للدوال التالية:

(1 $y = 2^{-x}$

(2 $y = 3^x$

(3 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

(4 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

(5 $y = 2^{2x}$

(6 $y = 2^x - 1$

(7 $y = 2^{x-1}$

(8 $y = 3^{x/2}$

(9 $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(10 $y = 3^{-2x/3}$

في التمارين من 11 إلى 20 أوجد قيمة x

(11 $3^x = \frac{1}{9}$

(12 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$

(13 $2^{-x} = \frac{1}{4}$

(14 $3^{-2x} = \frac{1}{81}$

(15 $2^x = 8$

(16 $2^x = 5$

(17 $5^{2x-5} = 9$

(18 $2^{-2x/3} = 4/5$

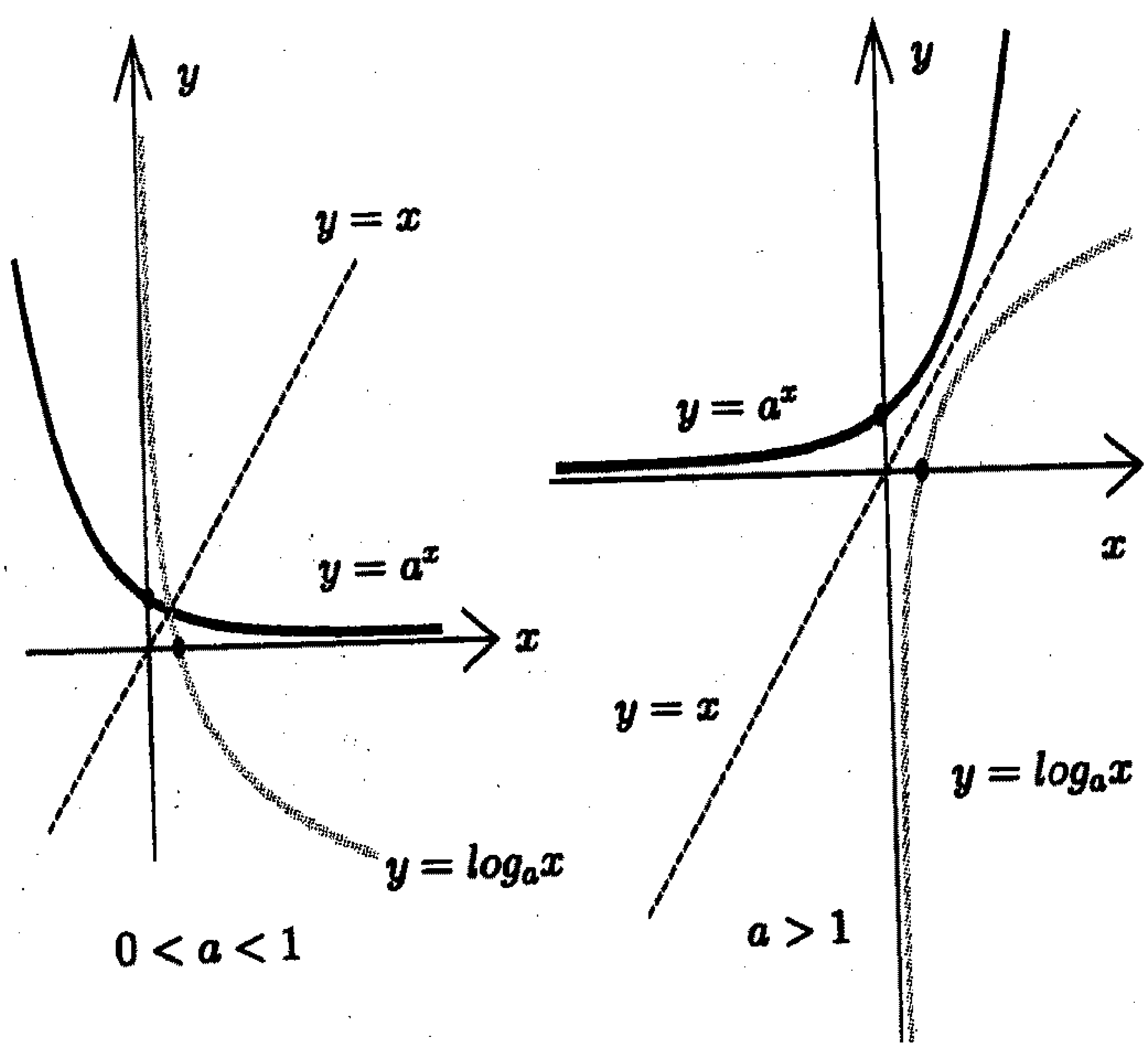
(19 $4(5^{3-x}) - 7 = 2$

(20 $8/(3x) = 4$

3.7 الدالة اللوغاريتمية (Logarithmic Function)

إذا كان $x = a^y$، فإن الدالة $y = \log_a x$ تسمى بالدالة اللوغاريتمية بالأساس a.

إذن نستطيع استنتاج العلاقة: $y = \log_a x \Longleftrightarrow x = a^y$



الشكل 4.7

وحيث أن بيان معكوس الدالة في المرآة $y = x$ لبيان الدالة، فإن بيان الدالة اللوغاريتمية موضح في الشكل (4.7).

نظرية 7

إذا كان $a \neq 1$ و$a > 0$ و x, y أعداداً موجبة، فإن:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

3) $\log_a 1 = 0$.

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

5) $\log_a a = 1$.

6) $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$ حيث r أي عدد حقيقي.

7) $a^{\log_a x} = x$:

8) $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$

البرهان

1) لنفرض أن $u = \log_a x$ و $v = \log_a y$

من التعريف $u = \log_a x \iff x = a^u$

كذلك $v = \log_a y \iff y = a^v$

إذن $xy = a^u . a^v = a^{u+v}$، وبذلك:

$$\log_a(xy) = u + v \iff xy = a^{u+v}$$

إذن: $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(x)$

2) $\dfrac{x}{y} = a^{u-v} \iff \log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = u - v \iff$

$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.

3) حيث إن $a^0 = 1 \iff \log_a 1 = 0$.

4) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$.

5) حيث إن $a^1 = a \iff \log_a a = 1$.

6) لنفرض أن $u = \log_a x \iff x = a^u \Longleftarrow x^r = (a^u)^r$

$x^r = a^{ru} \iff \log_a x^r = ru \iff \log_a x^r = r\log_a x$.

7) لنفرض أن $y = a^{\log_a x}$ إذن:

$$\log_a y - \log_a x = 0 \iff \log_a y = \log_a x$$

$$x = y \iff \frac{x}{y} = 1 \iff \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \iff$$

إذن $x = a^{\log_a x}$.

8) لنفرض أن $u = \log_a b \iff a^u = b$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس b نجد أن:

$$u \log_b a = 1 \Longleftarrow \log_a b a^u = \log_a b$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \Longleftarrow \log_b a = \frac{1}{u} \Longleftarrow$$

مثال 5

إذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a^x$، أوجد $(f \circ g)x$ و $(g \circ f)x$.

$$(f \circ g)x = f[g(x)] = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)x = g[f(x)] = g(a^x) = \log_a a^x = x\log_a a = x$$

إذن $g = f^{-1}$.

مثال 9

إذا كانت $f(x) = \ln \dfrac{x^4}{x-1}$، فأوجد:

أ) نطاق f.

ب) الفترات التي تكون عليها الدالة f تزايدية والفترات التي تكون عليها الدالة f تناقصية.

ج) الفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أعلى والفترات التي يكون عليها بيان الدالة f مقعّراً إلى أسفل.

د) نقط انقلاب بيان الدالة f.

هـ) ارسم بيان الدالة f.

الحل

حيث أن اللوغاريتم معرّف للأعداد الحقيقية الموجبة، فإن نطاق f هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 1.

لاحظ أنه يمكن كتابة الدالة f على الشكل:

$$f(x) = 4\mathbf{ln}\ x - \mathbf{ln}\ (x-1)$$

ويكون

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{3x-4}{x(x-1)}$$

ويكون

$$f''(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{(x-2)(x-2)}{x^2(x-1)^2}$$

لاحظ أن f' سالب لكل $1 < x < 3/4$، وصفر عند $x = 3/4$، وموجب عندما يكون $x > 4/3$.

هذا يعني أن f تناقصية على $(1, 4/3)$، وتزايدية على $(4/3, \infty)$، والنقطة $(4/3, f(4/3))$ هي نقطة نهاية صغرى للدالة f.

الآن $f''(x)$ لكل $1 < x < 2$، وصفر عند $x = 2$، وسالب عندما يكون $x > 2$. هذا يعني أن بيان الدالة f مقعّر إلى أعلى على $(1, 2)$، ومقعّر إلى أسفل على $(2, \infty)$، والنقطة $(2, f(2))$ نقطة انقلاب لبيان الدالة.

(أنظر الشكل 5.7)