جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

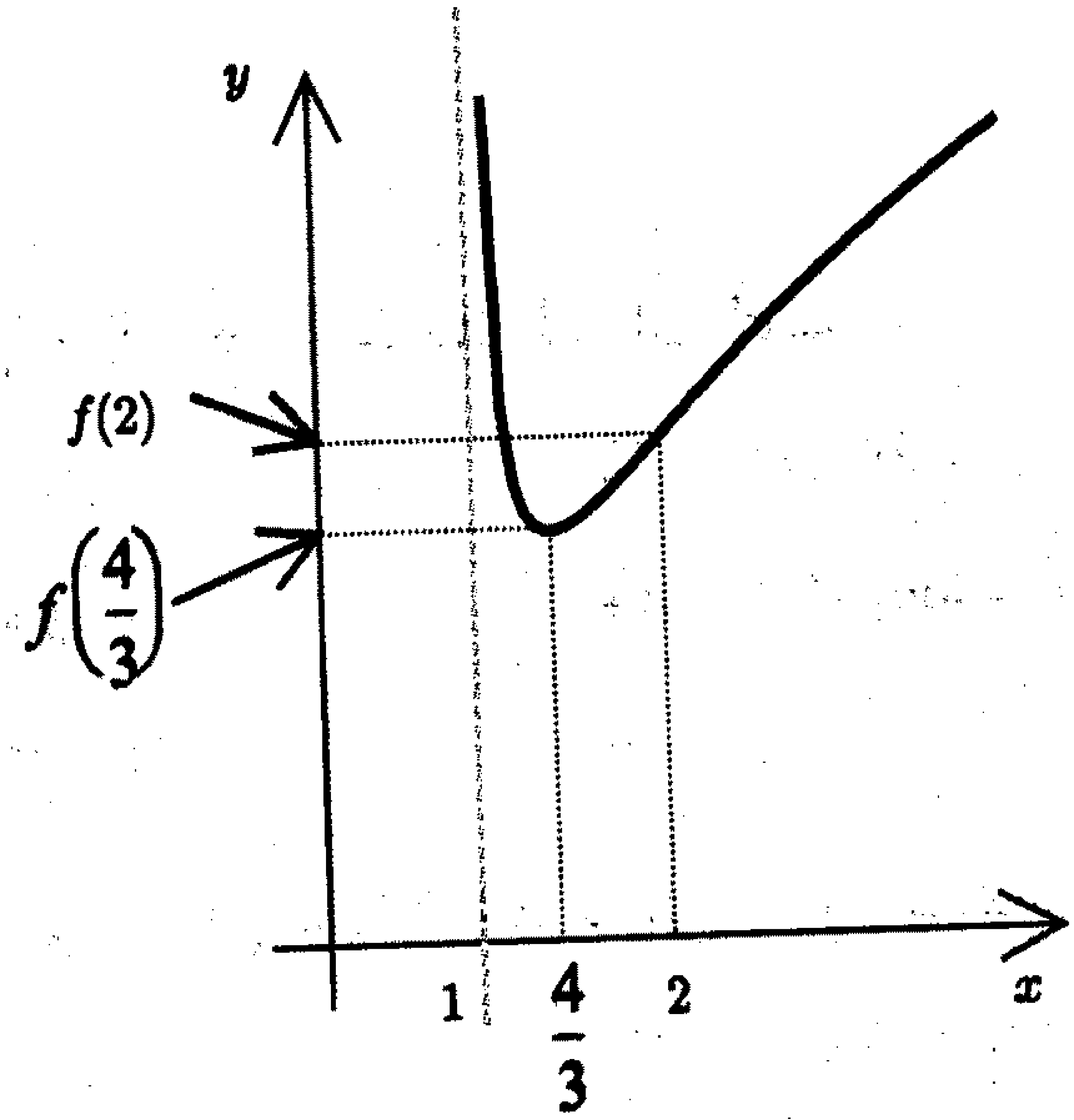
Mathematics 1

قوانين الدوال المثلثية الزائدية

These are the six hyperbolic trig Functions .and They are defined as

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام



شكل 5.7

ملاحظة

إذا كان الأساس $a = 10$، فإن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم العام أو الشائع ويكتب $\log x$.

تعريف 3.7

يعرف العدد e كالآتي: $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

العدد e هو عدد غير قياسي، $e = 2.718281828...$.

عندما يكون أساس اللوغاريتم e، فإن اللوغاريتم $\log_e x$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e x$.

تمارين 3.7

في التمارين من 1 إلى 6، أعط بياناً للدوال التالية:

1) $y = \log_2(x)$

2) $y = \log\,(x)$

3) $y = \ln\,(x)$

4) $y = \log_{1/2}(x)$

5) $y = \log_3(-x)$

6) $y = \ln|x|$

في التمارين من 7 إلى 20، أوجد ما يلي بدون استخدام الآلة الحاسبة:

7) $y = \log_2(4)$

8) $\ln x = \ln\,(3x+1) + 1$

9) $\log_x(64) = 3$

10) $\log\,(x+2)^2 = 2$ ، $x > 0$

11) $2^{2x} = 64$

12) $\ln x^2 - \ln x = \ln 18 - \ln 6$

13) $\log_3(x+2) = -2$

14) $\ln x^3 = 2\log 5 - 3\log 2$

15) $e^{2x-5} + 1 = 4$

16) $\log_4(2x+4) - 3 = \log_4 3$

17) $y = \log_3(27)$

18) $\log_3(x+1) = \log_3(x-1) + 1$

19) $\log_x(32) = -5$

20) $\log x - \log\,(x-1) = \log 4$

4.7 المشتقة الأولى للدوال الأسية واللوغاريتمية، وبعض التكاملات

نظرية 8

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

البرهان

إذا كان $y = \log_a x$، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{x(\Delta x)}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left\{\lim_{\frac{\Delta x}{x} \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\} = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$= \frac{1}{x\log_e a} = \frac{1}{x\ln a}$$

وبصفة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}}$$

نظرية 9

إذا كان $y = a^x$، فإن: $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

البرهان

$$x = \log_a y \iff y = a^x$$

بأخذ تفاضل الطرفين:

$$1 = \frac{1}{y \ln a} \cdot \frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = y \ln a$$

ومن ذلك

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

وبصفة خاصة:

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

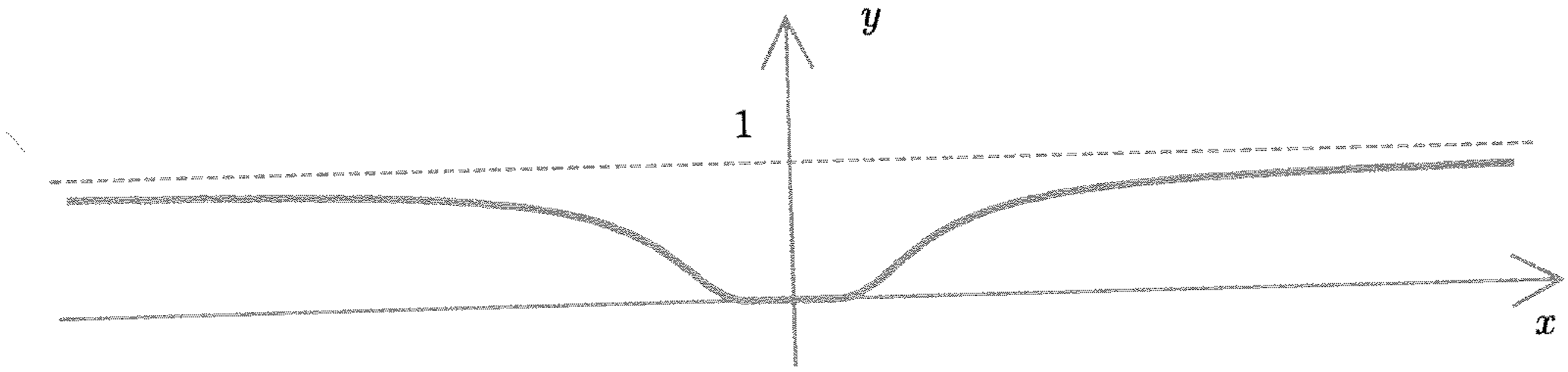
مثـــال 7

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

فارسم بيانياً منحنى الدالة f، وأوجد $f'(x)$.

الحــل



الشكل 6.7

لاحظ أن:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

الآن إذا كان $x \neq 0$، فإن:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

وإذا كان $x = 0$، فإن:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

وهذا يعني أن:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

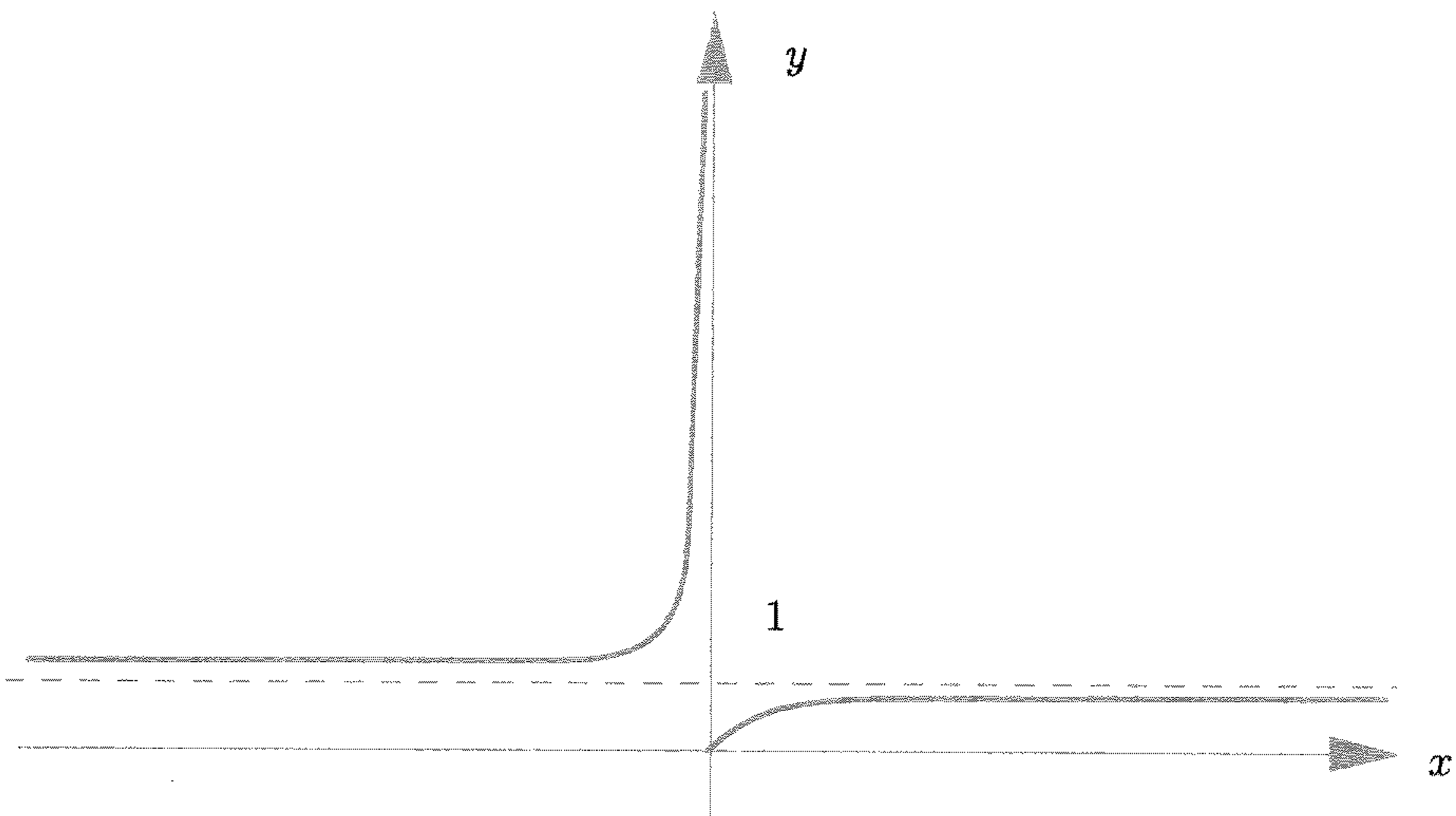
مثــال 8

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ارسم بيانياً منحنى الدالة f، وناقش قابلية f للاشتقاق عند $x = 0$.

الحــل



الشكل 7.7

لاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

ولكن $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ غير موجودة.

هذا يعني أن:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

غير موجودة، ومن ذلك نستنتج أن الدالة f غير متصلة عنده $x = 0$، وهذا يعني أنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

بعض التكاملات المفيدة:

1) $\int \frac{1}{x} dx = \mathbf{ln}\ |x| + C$.

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathbf{ln}\ a} + C$.

3) $\int e^x dx = e^x + C$.

تمارين 4.7

أوجد تفاضل الدوال الآتية:

(1 $y = \log_5 x$

(2 $y = 5^x$

(3 $y = \log_a x^2$

(4 $y = \pi^x$

(5 $y = \log_\pi x$

(6 $y = \ln(1+x^5)$

(7 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(8 $y = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

(9 $y = x^{\sqrt{x}}$.

أوجد تكامل الدوال التالية:

(10 $y = \log(\log x)$

(11 $y = (\ln x)^{x^2+2}$

(12 $y = (x^2+2)^{\ln x}$

(13 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(14 $y = x^2 e^x - x e^{x^2}$

(15 $y = (1 - e^{4x})^2$

(16 $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})$

(17 $y = e^{\sqrt{1-x^2}}$

(18 $y = (e^{2x} - e^{-2x})^2$

(19 $y = (1-x)e^x$.

(20 $y = e^{\frac{1}{x}}$

(21 $\int_1^4 2^x dx$

(22 $\int_1^{\ln 4} e^x dx$

(23 $\int_1^{e^3} \frac{1}{x} dx$

(24 $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x} dx$

(25 $\int e^{2+3x} dx$

(26 $\int 3x^2 e^x dx$

(27 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(28 $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{e^x+4}$

(29 $\int_0^1 x(e^{x^2}+2)dx$

(30 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{2e^{2x}+3}$

في التمارين من 31 إلى 40، أوجد الفترات التي تكون عليها الدالة المعطاة تزايدية، والفترات التي تكون عليها تناقصية، ونقط النهاية القصوى، وحدد تقعّر بيان الدالة المعطاة، ونقط انقلاب البيان، وارسم بيانياً الدالة المعطاة في كل حالة:

(31 $f(x) = e^{x^2}$

(32 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

(33 $f(x) = x^2e^x$

(34 $f(x) = (1-x)e^x$

(35 $f(x) = xe^x$

(36 $f(x) = 10^{1-x^2}$

(37 $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$

(38 $f(x) = \mathbf{log}\,(\sqrt{1-x^2})$

(39 $f(x) = \dfrac{1}{x\,\mathbf{ln}\,x}$

(40 $f(x) = (2^x + x^2)^2$

5.7 قاعدة لوبيتال والأشكال غير المحددة
Indeterminate forms and L'Hopital's Rule

أ) الشكل غير المحدد $\frac{0}{0}$

عند دراستنا للنهايات واجهتنا مشكلة الشكل غير المحدد $\frac{0}{0}$، وقلنا في ذلك الوقت أنه لا بد من القيام بعمليات جبرية حتى لا يظهر هذا الشكل، ولكن في بعض الأحيان قد لا تسعفنا أي طريقة جبرية في التخلص من هذا الشكل.

قاعدة لوبيتال التالية تساعدنا في حساب مثل هذه النهايات.

قاعدة لوبيتال (أ)

لنفرض أن g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b)، عدا عند النقطة c في الفترة (a,b)، ولنفرض أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في الفترة (a,b). إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ ، وإذا كان $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

البرهان

تعرّف الدالتان F وG كما يلي:

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & ; \quad x \neq c \\ 0 & ; \quad x = c \end{cases} \quad , \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \neq c \\ 0 & ; \quad x = c \end{cases}$$

لاحظ أن $F'(x) = f'(x)$ و $G'(x) = g'(x)$ عدا عند $x = c$، ولهذا فإن الدالتين F وG قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b) عدا عند c.

قابلية الدالتين F وG للاشتقاق تؤدي إلى اتصالية الدالتين F وG عدا عند $x = c$، ولكن:

$$\lim_{x\to c} F(x) = \lim_{x\to c} f(x) = 0 = F(c)$$

و

$$\lim_{x\to c} G(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 = G(c)$$

وهذا يضمن اتصالية الدالتين F وG على كل الفترة (a,b).

يمكن الآن تطبيق نظرية القيمة الوسطى المعمّمة على الفترة $[c,x]$، وبذلك يكون هناك عدد k بين x وc حيث أن:

$$\frac{F(x)-F(c)}{G(x)-G(c)} = \frac{F'(k)}{G'(k)}$$

وحيث أن $F(c) = G(c) = 0$، فإن:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(k)}{G'(k)}$$

حيث أن k, x نقطتان في الفترة (a,b)، يمكن كتابة $F(x) = f(x)$ و$F'(k) = f'(k)$ و $G(x) = g(x)$ و $G'(k) = g'(k)$ ويصبح لدينا

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(k)}{G'(k)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

عندما $x \to c$ ، $k \to c$ فإن ذلك يعني:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فإذا كان

$$\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

فإن

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

مثـــال 9

أوجد $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

الحـــل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x}{1}=1$$

مثـــال 10

احسب $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$.

الحـــل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{0}{1}=0$$

يمكن استخدام القاعدة السابقة عندما $x\to\pm\infty$ أو $x\to c^+$ أو $x\to c^-$

مثـــال 11

احسب $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{3}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

الحـل

عند التعويض مباشرة نحصل على الشكل $\frac{0}{0}$، ولكن باستخدام قاعدة لوبيتال نحصل على:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = 2$$

ب) الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$

يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال عند الحصول على الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$، وذلك للحصول على $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$.

قاعدة لوبيتال (ب)

لنفرض أن g, f دالتان قابلتان للاشتقاق على الفترة (a,b)، عدا عند النقطة c في الفترة (a,b)، ولنفرض أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في الفترة (a,b).

إذا كان $\lim_{x\to c}|f(x)| = \lim_{x\to c}|g(x)| = \infty$ ، وإذا كانت $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يمكن استخدام القاعدة السابقة عندما $x \to \pm\infty$ أو $x \to c^+$ أو $x \to c^-$.

مثـال 12

أوجد $\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7\tan x}{5+\sec x}$.

الحـل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل غير المحدد $\frac{\infty}{\infty}$ ، ولكن عند تطبيق

قاعدة لوبيتال (ب) نجد أن:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7\tan x}{5+\sec x}=\lim_{\to(\pi/2)^+}\frac{7\sec^2 x}{\sec x\tan x}$$

$$=\lim_{x\to(\pi/2)^+}\frac{7}{\sin x}=7$$

ج) حالات أخرى للأشكال غير المحددة

قد تظهر عدة أشكال أخرى غير محددة، ولكن يمكن تحويلها إلى الشكل $\frac{0}{0}$ أو الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ ومنها:

1) الشكل $0.\infty$

مثال 13

احسب $\lim_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\sec x$.

الحل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل $0.\infty$، ولكن استخدام قاعدة لوبيتال يعطينا:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{x-\pi/2}{\sec x}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{-\sin x}=-1$$

2) الشكل $\infty-\infty$

مثال 14

احسب $\lim_{x\to0^+}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)$.

الحل

عند التعويض المباشر نحصل على الشكل $\infty-\infty$، ولكن تطبيق قاعدة لوبيتال

مرتين يعطي:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\csc x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{2\cos x-\sin x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

3) الأشكال غير المحددة 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞

تظهر هذه الأشكال من التعبير $(f(x))^{g(x)}$، ولهذا لا بد من إجراء للحصول على $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^{g(x)}$، وهذا الإجراء هو:

(1) نفرض أن $y=(f(x))^{g(x)}$.

(2) $\ln y=g(x)\ln(f(x))$ وذلك بأخذ لوغاريتم الطرفين في 1.

(3) إذا كان $\lim\limits_{x\to c}\ln y=L$ ، فإن $\lim\limits_{x\to c}y=e^L$.

مثال 15

احسب $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$.

الحل

الشكل غير المحدد هنا هو 1^{∞}، ولذلك فإن:

$$y = (1+3x)^{\frac{1}{2x}} \quad (1)$$

$$\ln y = \frac{1}{2x}\ln(1+3x) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{1+3x}}{2} \quad (3)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2(1+3x)} = \frac{3}{2}$$

ولهذا فإن $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0} y = e^{\frac{3}{2}}$

تمارين 5.7

استخدم قاعدة لوبيتال لإيجاد النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$

2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2\sin x}{4x^3}$

4) $\lim_{x\to \pi/2}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^{-1}}{\sin(2x^{-1})}$

6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(17+x)}{x}$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+1}{x^4+x^3}$

8) $\lim_{x\to\infty^+} xe^{\frac{1}{x}}$

9) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

10) $\lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{\frac{x}{2}}$