جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

استخدام التعويض لحل المشتقة

There are two forms of the chain rule

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

11) $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\sec x}$

12) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

13) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{x}$

14) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{\ln x}-\frac{1}{x\ln x}\right)$

15) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}\right)$

6.7 النمو والانحلال الأسي

إذا كانت y كمية معدل تغيرها بالنسبة للزمن، يتناسب مع الكمية المعطاة في الزمن t، فإن الشكل العام للكمية يكون:

$$y = ce^{kt}$$

حيث k ثابت تناسب النمو إذا $k > 0$، ويكون k ثابت تناسب الانحلال إذا كان $k < 0$.

مثال 6:

إذا كانت y هي كمية عنصر مشع، بحيث تبقى $\frac{1}{2}$ الكمية بعد 25 عاماً، فإذا كانت الكمية جراماً واحداً، كم يبقى منها بعد 10 سنوات؟

الحل:

نفترض أن الانحلال يتناسب مع y.

إذن: $y = ce^{kt}$

عند $y = 1$ يكون $t = 0$ وبذلك فإن:

$1 = ce^0 = c$ وهذا يؤدي إلى أن $c = 1$

وعندما $y = \frac{1}{2}$، فإن $t = 25$، وبالتالي، فإن:

$\frac{1}{2} = ce^{25k} = e^{25k}$ وهذا يعني أن $k = \frac{\mathbf{ln}\ (1/2)}{25} = -0.027$

إذن: $y = e^{-0.027t}$

وعند $t = 10$، فإن: $y = e^{-0.026(10)} = 0.66$

مثـــال 17

يقوم عالم بتجارب على مزرعة بكتيريا، التي تزداد بناءً على قانون النمو الأسي، فإذا كان عدد البكتيريا 100 في اليوم الثاني من التجربة، و300 في اليوم الرابع من التجربة، فما العدد الأصلي في المزرعة؟

الحـــل

حيث أن النمو أسي، فإن: $y = ce^{kt}$

العدد الأصلي يتم الحصول عليه عندما $t = 0$ وهو: $y = e^{k(0)} = c$

ومن المعطيات:

$$100 = ce^{2k} \quad (1)$$

$$300 = ce^{4k} \quad (2)$$

من المعادلة (1) $c = 100e^{-2k}$

والتعويض في (2) $300 = 100e^{2k}$ أو $e^{2k} = 3$

إذن $k = \dfrac{\ln 3}{2} = 0.549$

بالتعويض عن k في المعادلة (1)، نجد أن: $c = 33.33$

مثـــال 18

أودع مبلغ من النقود في مصرف بربح مركّب. إذا وصل المبلغ إلى الضعف في 6 سنوات، ما النسبة السنوية للربح؟

الحـــل

المبلغ الأصلي هو c حيث $t = 0$

$$y = ce^{kt}$$

من المعطيات، نجد أن $y = 2c$، عندما $t = 6$

إذن $2c = ce^{k6}$.

أو $k = \dfrac{\ln 2}{6} = 0.116$

إذن النسبة المئوية هي 11.6% في السنة.

تمارين 6.7

1) في تجربة على مزرعة بكتيرية، ارتفع عدد البكتيريا من 5000 إلى 10000 في 10 ساعات. بمعلومية أن التكاثر في هذه المزرعة يتم بناءً على قانون النمو الأسي، ضع قانوناً لتكاثر هذه البكتيريا بعد t ساعة. ما العدد بعد 20 ساعة؟

متى يصل العدد إلى 50000؟

2) إذا كان عدد السكان في دولة ما ينمو بناءً على قانون النمو الأسي. متى يتضاعف عدد السكان إذا كان ينمو بمعدل 1.1 في المائة لكل سنة؟

3) بلغ عدد سكان دولة صغيرة 10 مليون في سنة 1980 م. إذا كان عدد السكان ينمو بناءً على قانون النمو الأسي بنسبة 3% في السنة، فاكتب معادلة لتكاثر السكان بدلالة الزمن، وأوجد عدد السكان في سنة 2000م.

متى يتضاعف عدد السكان في هذه الدولة؟

4) إذا كانت الكمية q تنمو أو تنحل أسياً، فإذا كانت $q = q_1$ عندما $t = t_1$ و$q = q_2$ عندما $t = t_2$ وكان k ثابت النمو أو الانحلال، برهن أن:

$$k = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \left(\frac{q_2}{q_1} \right)$$

5) إذا كان هناك 100 جرام من مادة مشعة، وبعد 4 سنوات بقي منها 20 جراماً، أجب عن الأسئلة التالية:

أ) كم جراماً يبقى من هذه المادة بعد 8 سنوات؟

ب) كم جراماً يبقى من هذه المادة بعد 10 سنوات؟

ج) ما هو العمر النصفي لهذه المادة؟

تمارين على الفصل السابع

في التمارين من 1 إلى 3، أوجد f^{-1}:

1) $f(x) = 1 - \ln x$

2) $g(x) = e^x + e^{-x}$ لكل $x > 0$

3) $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

في التمارين من 4 إلى 6، حل المعادلة المعطاة:

4) $y = \log_3 9$

5) $\log x = 10^{-9}$

6) $4 = \log_x\left(\dfrac{1}{16}\right)$

7) $y = e^{\ln(7.2)}$

8) ارسم الدالة $f(x) = |x+1|$.

في التمارين من 9 إلى 18، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

9) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

10) $f(x) = \ln[x + \ln(3 + x)]$

11) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$

12) $f(x) = \log_3 2^{x+5}$

13) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

14) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x+2}{e^x-2}\right)$

15) $f(x) = x^{\sin x}$

16) $f(x) = (3^{5x})(2^{4x})$

17) $f(x) = \sqrt{\log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}$

18) $f(x) = x^{x^3}$

19) $f(x) = (x^2+4)^{\ln x}$

في التمارين من 20 إلى 40، احسب التكامل المعطى:

20) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}\,dx$

21) $\displaystyle\int \frac{4^{\ln x}}{x}\,dx$

22) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx$

23) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{ex}}}\,dx$

24) $\int \frac{\pi^{1/x}}{x^2} dx$

25) $\int \frac{3x}{1+x^2} dx$

26) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$

27) $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}} dx$

28) $\int \frac{\ln x}{x dx}$

29) $\int \frac{1/x^2}{1+(1/x)} dx$

30) $\int x e^{x^2-4} dx$

31) $\int \frac{\ln (x+1) dx}{\sqrt{x+1}}$

32) $\int (\ln x)^2 dx$

33) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

34) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

35) $\int x 10^{1+x^2} dx$

36) $\int \frac{5a^{\sqrt{x+1}} dx}{\sqrt{x+1}}$

37) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

38) $\int \frac{dx}{2+3e^{4x}}$

39) $\int 2^{x \ln x}(1+\ln x) dx$

40) $\int_0^{\pi/2} 3^{\sin x} \cos x dx$

في التماين من 41 إلى 50، احسب النهايات المعطاة مستخدماً قاعدة لوبيتال

41) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

42) $\lim_{x \to 0} [\ln (x+1)]^x$

43) $\lim_{x \to 0} (1+\sin x)^{\tan x}$

44) $\lim_{x \to 0} \frac{x e^x}{1-x}$

45) $\lim_{x \to 0} \frac{8^x-2^x}{4x}$

46) $\lim_{x \to \infty} \frac{x+e^{2x}}{\ln x+e^{2x}}$

47) $\lim_{x \to 0^+} (e^x-1)^x$

48) $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3}$

49) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2-x \sin x}{e^x-e^{-x}-x^2-2}$

50) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

الفصل الثامن

معكوس الدوال المثلثية

The Inverse Trigonometric Functions

إذا كانت $f: X \to Y$ دالة أحادية، يكون لها معكوس كدالة $f^{-1}: X \to Y$؛ حيث إن $x = f^{-1}(y)$ إذا وإذا كان فقط $y = f(x)$.

بما أن الدوال المثلثية دوال غير أحادية، فإن الدوال المثلثية ليس لها معكوس إلا إذا قيدت نطاقاتها.

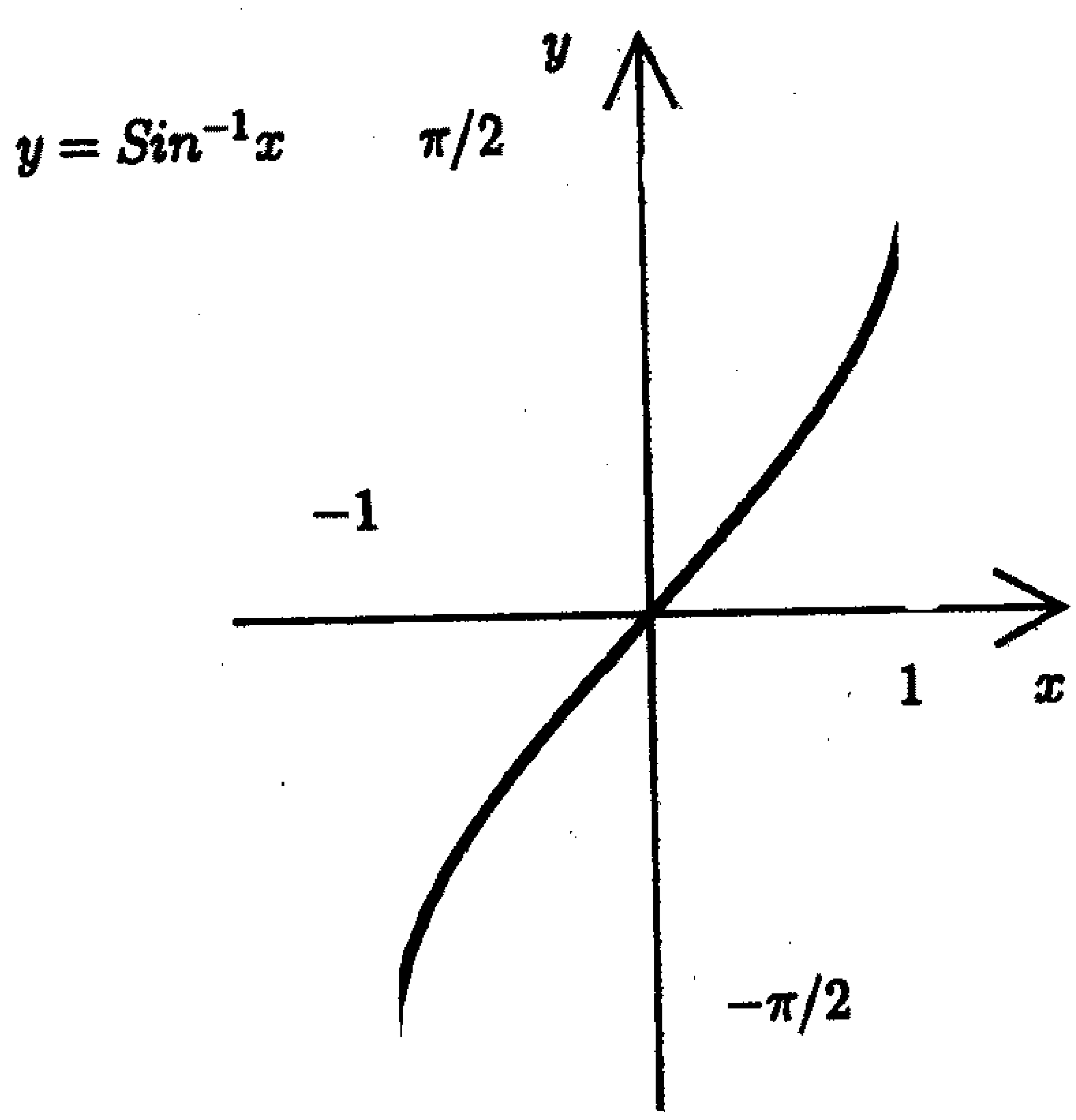
ندرس الآن دالة الجيب $\sin x$، التي يكون نطاقها المجموعة $\mathbb{R}$ ومداها الفترة $[-1,1]$. حيث إن دالة $\sin x$ ليست أحادية على $\mathbb{R}$، فمن الممكن إيجاد مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. بحيث تكون الدالة $\sin x$ دالة أحادية على تلك المجموعة. فمثلاً إذا اخترنا المجموعة $[-\pi/2, \pi/2]$، فإن دالة الجيب الجديدة الناشئة من تقييد نطاق $\sin x$ من $\mathbb{R}$ إلى $[-\pi/2, \pi/2]$ تكون دالة أحادية، وفي هذه الحالة يكون لها معكوس كدالة.

1.8 دالة معكوس الجيب والمشتقة الأولى لها

تعريف 1.8

تعرّف دالة معكوس الجيب $\mathrm{Sin}^{-1}x$ كالآتي:

$y = \mathrm{Sin}^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $x = \sin y$، عندما يكون $-1 \le x \le 1$، $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$.



الشكل 1.8

مثـــال 1

أوجد $\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

الحـل

لنفرض أن

$$-\pi/2 \le y \le \pi/2 \text{ و } \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff y = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ذلك $y = \pi/4$.