جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

# رياضيات ١

# Mathematics 1

قوانين اشتقاق ال وx

Defined , formula, and used the chain rule

المرحلة الأولى – الفصل الاول

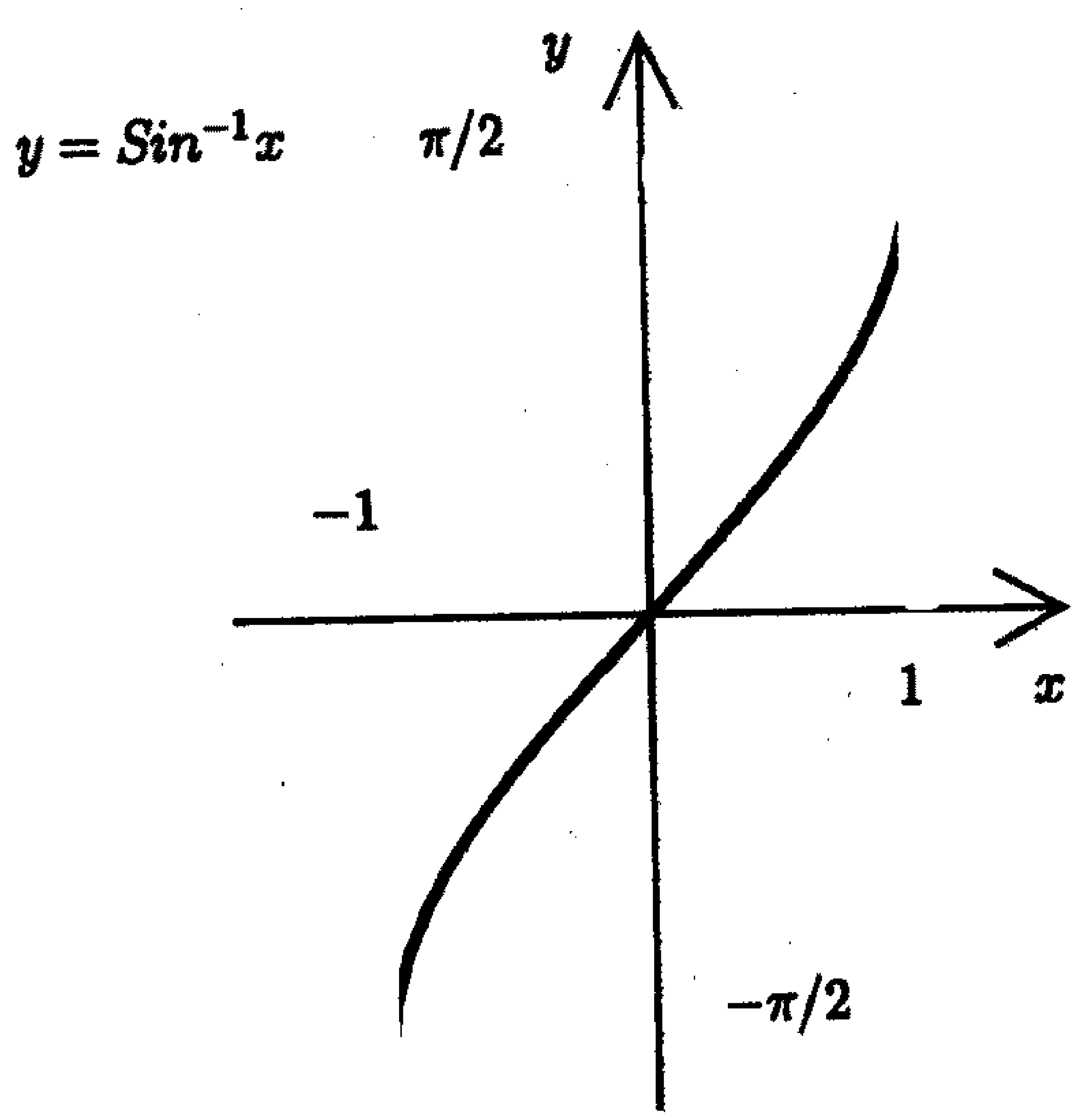
م.م. عدي عبد هزام

## 1.8 دالة معكوس الجيب والمشتقة الأولى لها

**تعريف 1.8**

تعرّف دالة معكوس الجيب $\mathbf{Sin}^{-1}x$ كالآتي:

$y=\mathbf{Sin}^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $x=\mathbf{sin}y$، عندما يكون $-1\le x\le 1$، $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$.




الشكل 1.8

### مثـــال 1

أوجد $\mathbf{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

### الحـــل

لنفرض أن

$$-\pi/2\le y\le\pi/2 \text{ و } \mathbf{sin}\, y=\frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow y=\mathbf{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ومن ذلك $y=\pi/4$.

**نظرية 1**

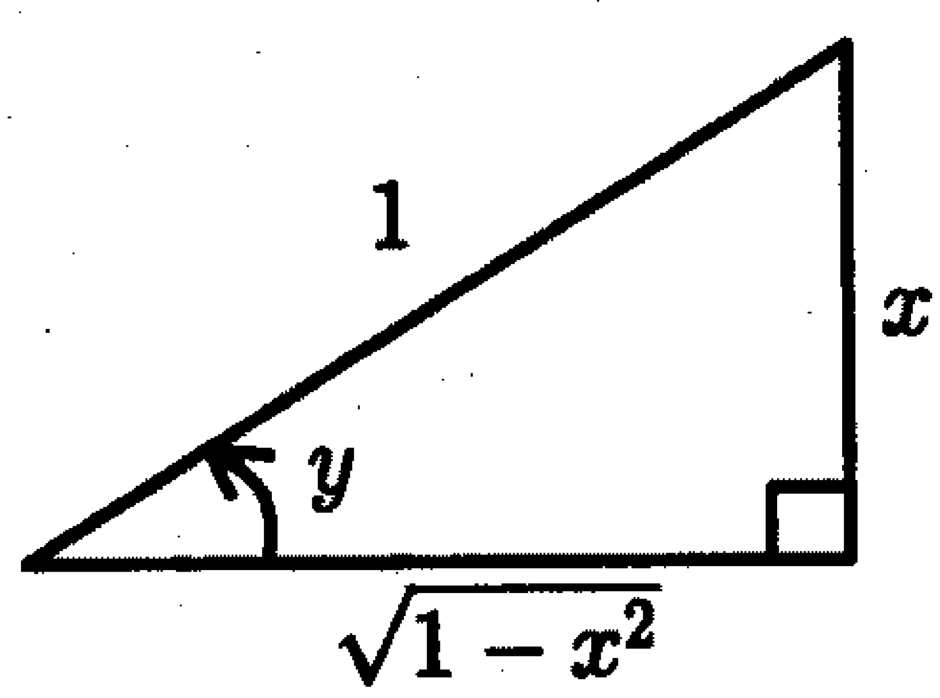
الدالة $y=\mathbf{Sin}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ و $\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

## البرهان

لنفرض أن $y=\mathbf{Sin}^{-1}x \Longleftrightarrow \mathbf{sin}y=x$ ، $-\pi/2\le y\le \pi/2$ ، $x\in(-1,1)$.

إذن $\mathbf{cos}y\,\frac{dy}{dx}=1$ ، وذلك بتفاضل الطرفين.

ومن ذلك $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\mathbf{cos}y}$




الآن $-\pi/2\le y\le\pi/2, x=\mathbf{sin}y$

إذن $\mathbf{cos}y=\sqrt{1-x^2}$

ومن ذلك، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي أن

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث $u$ دالة في $x$.

## تمارين 1.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Sin}^{-1}(1)$

2) $\mathbf{Sin}^{-1}(\sqrt{2})$

3) $\mathbf{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) $\mathbf{Sin}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5) $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

في التمارين من 6 إلى 10، استخدم الآلة الحاسبة، أو الجداول لإيجاد ما يلي:

6) $\mathbf{Sin}^{-1}(0.64420)$

7) $\mathbf{Sin}^{-1}(-0.5505)$

8) $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

9) $\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{5}{11}\right)$.

10) $\mathbf{Sin}^{-1}(-0.54950)$

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

11) $y = \mathbf{Sin}^{-1}(3x)$

12) $x\mathbf{Sin}^{-1}(y) = x + y$

13) $y = \mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$

14) $y = x\sqrt{4-x^2} + 4\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

15) $y = \mathbf{Sin}^{-1}(1+x^2)$

16) $y = \mathbf{ln}\ (\mathbf{Sin}^{-1}x)$

17) $y = \mathbf{Sin}^{-1}\sqrt{x}$

18) $y = x\ \mathbf{Sin}^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$

19) $y = \mathbf{Sin}^{-1}(\mathbf{cos}x\ )$

20) $y = \mathbf{Sin}^{-1}(\mathbf{ln}\ x)$

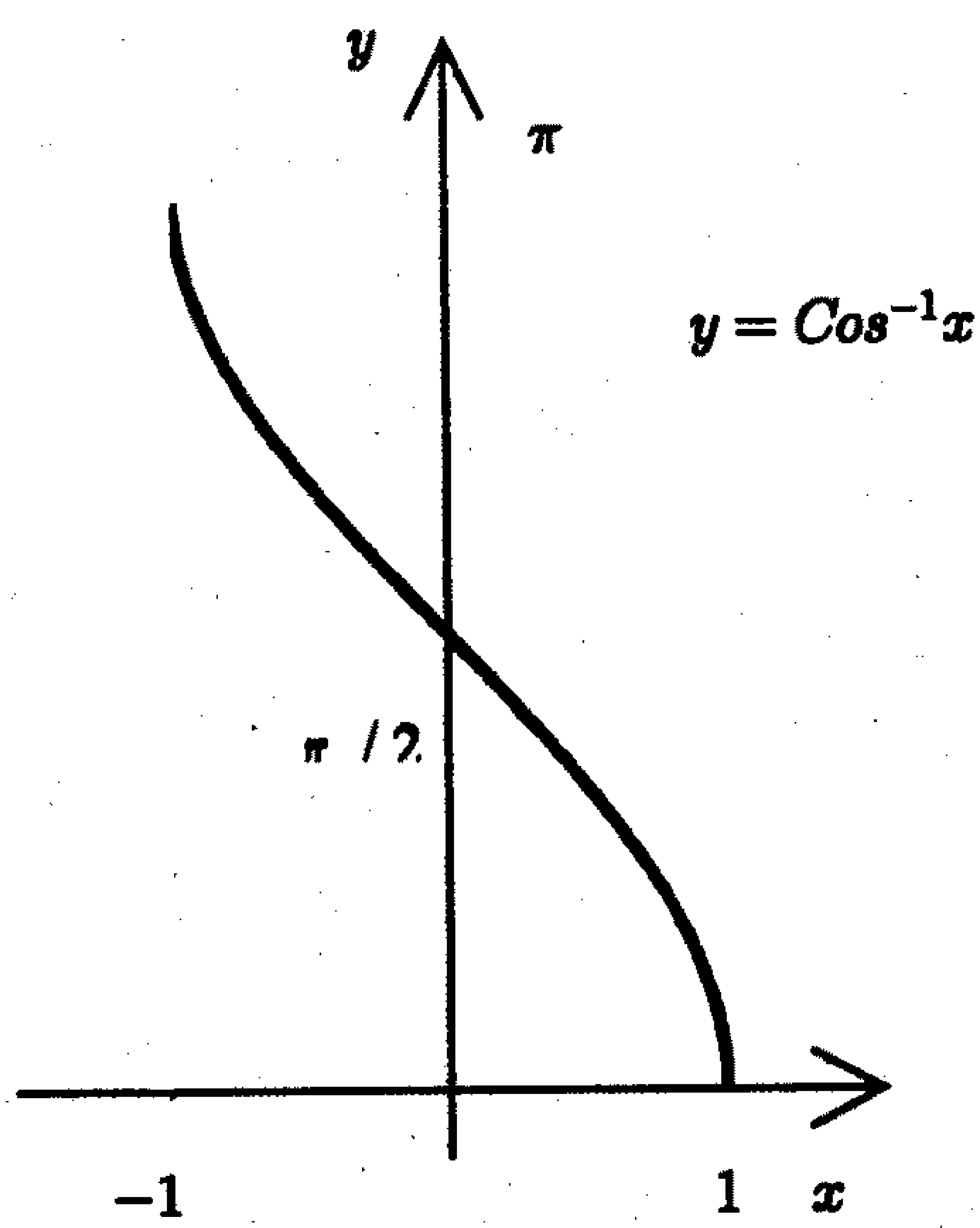
## 2.8 دالة معكوس جيب التمام والمشتقة الأولى لها

بالمناقشة السابقة نفسها التي أثيرت في البند السابق، يمكن تعريف دالة معكوس جيب التمام كالآتي:

**تعريف 2.8**

تعرّف دالة معكوس جيب التمام $Cos^{-1}x$ بأنها:

$y = \text{Cos}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \cos y$ و $0 \leq y \leq \pi$.




الشكل 2.8

### مثال 2

أوجد $\text{Cos}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

### الحل

لنفرض أن $y = \text{Cos}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

معنى ذلك أن $\cos y = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $0 \leq y \leq \pi$

إذن $y = \pi/6$.

**نظرية 2**

الدالة $y = \mathrm{Cos}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $(-1,1)$ و

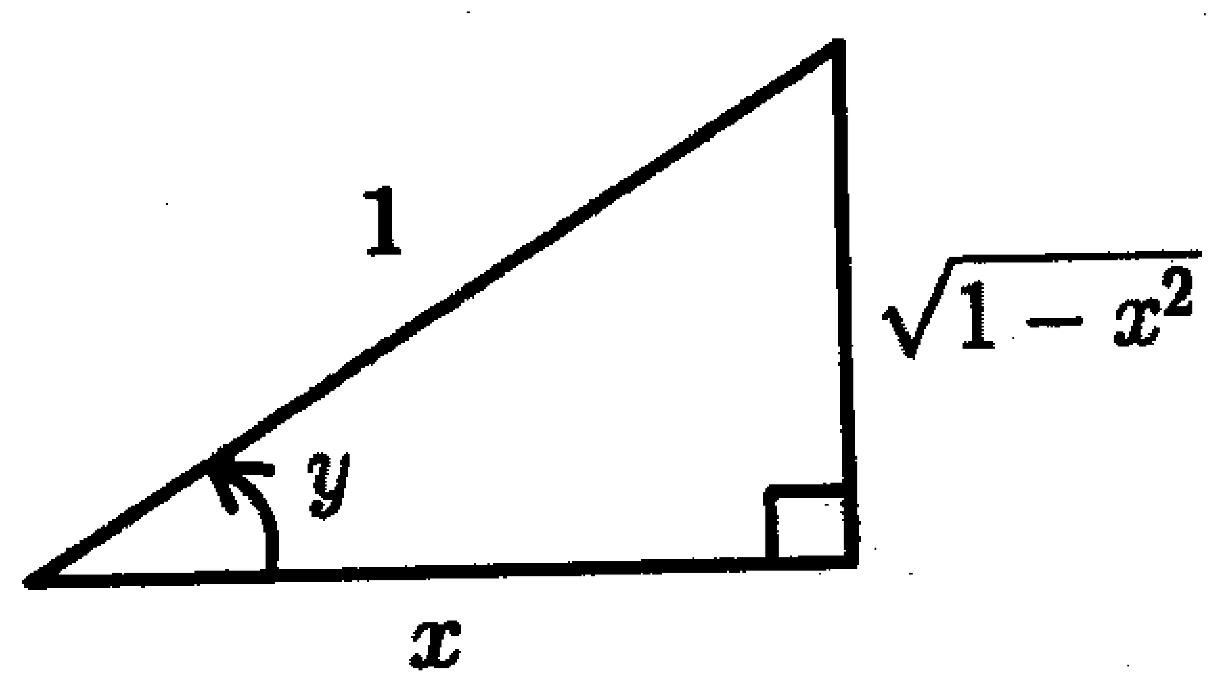
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**البرهان**

لنفرض أن $y = \mathrm{Cos}^{-1}x \Longleftrightarrow \cos y = x$ ، $0 \le y \le \pi$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = -\sin y \dfrac{dy}{dx}$

أو $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$$




حيث إن $x = \cos y$

فإن $\sin y = \sqrt{1-x^2}$

إذن $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

أي أن: $$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cos}^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث $u$ دالة في $x$.

**مثـال 3**

أوجد $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Sin}^{-1}(\sqrt{x})$.

الحـــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftarrow u=\sqrt{x}$$
$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Sin}^{-1}(\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

مثـــال 4

أوجد $\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)$.

الحـــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx}=3x^2+1 \Leftarrow u=x^3+x$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}u=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}(3x^2+1)$$
$$=\frac{-(3x^2+1)}{\sqrt{1-(x^3+x)^2}}$$

## تمارين 2.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(2 $\mathbf{Cos}^{-1}\left[\mathbf{cos}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

(3 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(4 $\mathbf{cos}\left[\mathbf{Sin}^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right]$

(5 $\mathbf{Cos}^{-1}(1)$

في التمارين من 6 إلى 10، استخدم الآلة الحاسبة، أو الجداول لإيجاد ما يلي:

(6 $\mathbf{Cos}^{-1}(0.6675)$

(7 $\mathbf{Cos}^{-1}(-0.9051)$

(8 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

(9 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right)$

(10 $\mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$

في التمارين من 11 إلى 18، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

(11 $y = x^2\mathbf{Cos}^{-1}(3x)$

(12 $\mathbf{Cos}^{-1}(xy) = \mathbf{Sin}^{-1}(x+y)$

(13 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(x^4)$

(14 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(x^3+x)$

(15 $y = x^2\mathbf{Cos}^{-1}(1-x)$

(16 $y = \mathbf{Cos}^{-1}(\mathbf{sin}\ e^x)$

(17 $y = \mathbf{Cos}^{-1}\sqrt{x-1}$

(18 $y = x\mathbf{Cos}^{-1}x - \sqrt{1-x^2}$

(19 إذا كان $0 \le x \le \pi$، فبرهن على أن: $\mathbf{Cos}^{-1}(\mathbf{cos}x) = x$.

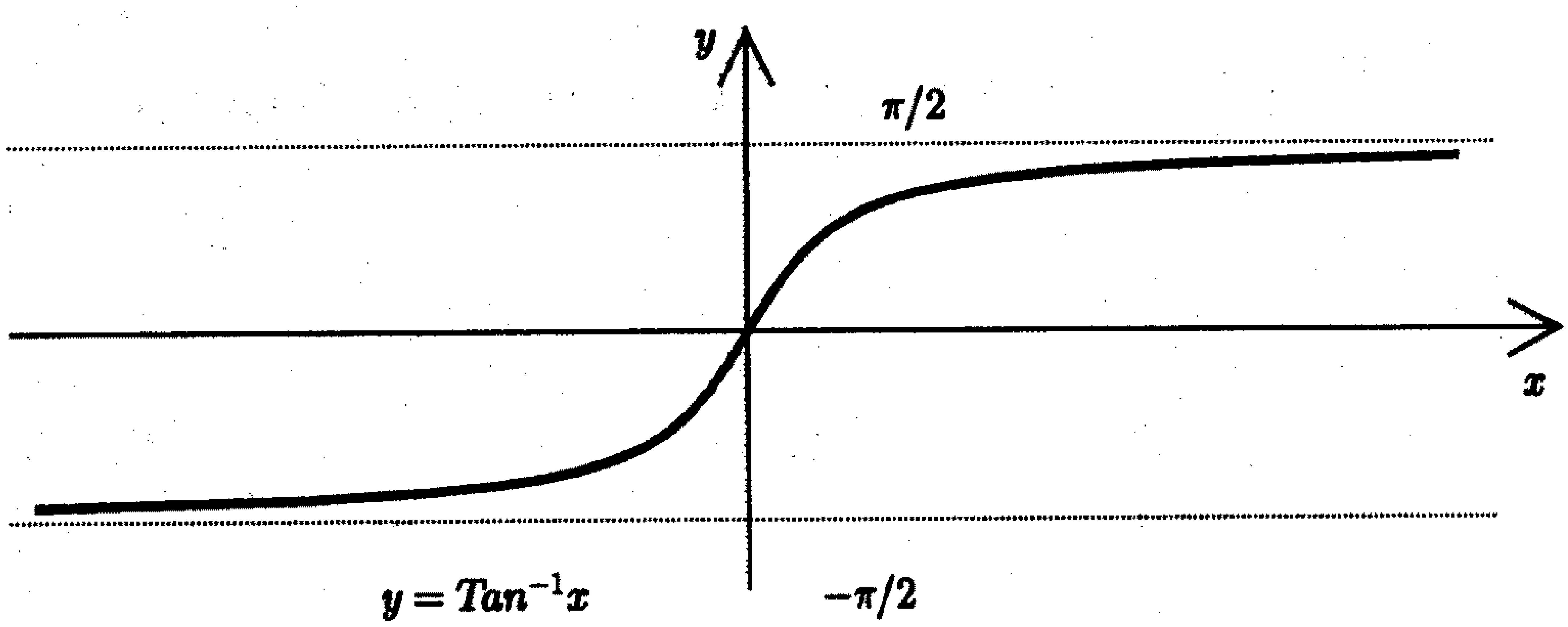
(20 إذا كان $-1 \le x \le 1$، فبرهن على أن: $\mathbf{cos}\ (\mathbf{Cos}^{-1}x) = x$.

## 3.8 دالة معكوس الظل والمشتقة الأولى لها

**تعريف 8.3**

تعرّف دالة معكوس الظل $\mathrm{Tan}^{-1}x$ كما يلي:

$y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x=\tan y$ و $-\pi<y<\pi/2$.




الشكل 3.8

### مثال 5

أوجد $\mathbf{Tan}^{-1}(-1)$.

### الحل

لنفرض أن:

$$\tan y=-1 \iff y=\mathbf{Tan}^{-1}(-1) \quad \text{و} \quad -\pi/2<y<\pi/2$$

إذن $y=-\pi/4$ أي أن $\mathbf{Tan}^{-1}(-1)=-\pi/4$

**نظرية 3**

الدالة $y = \text{Tan}^{-1}x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

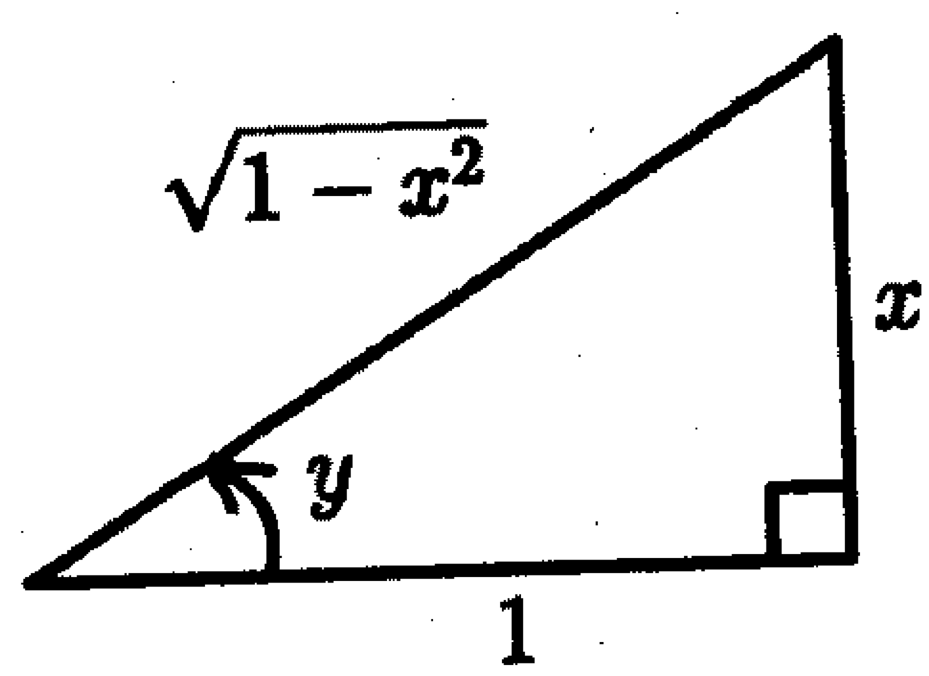
$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

**البرهان**

لنفرض أن $y = \text{Tan}^{-1} \iff \tan y = x$ ، $-\pi/2 < y < \pi/2$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = \sec^2 y\frac{dy}{dx}$

أو $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$




الآن $\sec y = \sqrt{1+x^2}$

إذن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

ومعنى ذلك أن:

$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{dy}{dx}$$

حيث $u$ دالة في $x$.

**مثال 6**

أوجد $\frac{d}{dx}\text{Tan}^{-1}(\frac{x}{2})$

الحـــل

لنفرض أن

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Longleftarrow u = \frac{x}{2}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Tan}^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+(x/2)^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{4+x^2}$$

## تمارين 3.8

في التمارين من 1 إلى 5، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Tan}^{-1}(-1)$ 2) $\sin\left(\mathbf{Tan}^{-1}(-5)\right)$

3) $\mathbf{Tan}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $\mathbf{Tan}^{-1}\left[\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

5) $\mathbf{Tan}^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

6) أوضح أن $\mathbf{Tan}^{-1}(\tan(x)) = x$ لكل $-\pi/2 < x < \pi/2$.

7) أوضح أن $\tan\left(\mathbf{Tan}^{-1}(x)\right) = x$ لكل قيم $x$.

13) أوضح أن $\tan\left(\mathbf{Tan}^{-1}x + \mathbf{Tan}^{-1}y\right) = \dfrac{x+y}{1-xy}$ حيث أن $xy \neq 1$.

9) أوضح أن $\tan\left(\frac{1}{2}\mathbf{Cos}^{-1}x\right) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ لكل $-1 < x < 1$.

10) أوضح أن $\sin(\mathbf{Tan}^{-1}x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ لكل قيم $x$.

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

(11 $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(12 $g(x) = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{x+2}{1-2x}\right)$

(13 $f(x) = \tan\left(2\,\mathbf{Tan}^{-1}\dfrac{x}{2}\right)$

(14 $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(15 $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}(x-4)^2$

(16 $g(x) = \mathbf{Tan}^{-1}(\ln x)$

(17 $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(18 $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}\sqrt{\cos x}$

(19 $g(x) = xe^x\mathbf{Tan}^{-1}x$

(20 $g(x) = x\mathbf{Tan}^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$