جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قوانين المشتقة الثالثة والرابعة وهكذا

first derivative, second derivative, third derivative.

المرحلة الأولى – الفصل الاول

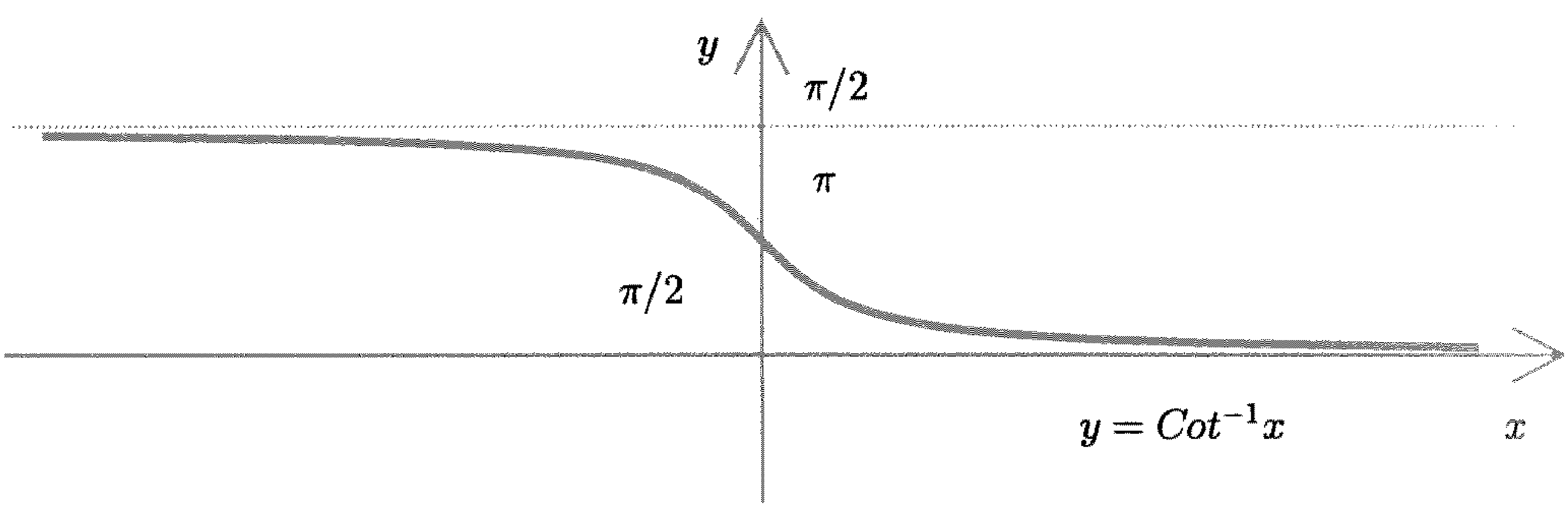
م.م. عدي عبد هزام

4.8 دالة معكوس ظل التمام والمشتقة الأولى لها

تعريف 4.8

تعرّف دالة معكوس ظل التمام $\text{Cot}^{-1}x$ كما يلي:

$y = \text{Cot}^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \cot y$ و $0 < y < \pi$.



الشكل 4.8

مثـــال 7

أوجد $\textbf{Cot}^{-1}(\sqrt{3})$.

الحـــل

لنفرض أن $y = \textbf{Cot}^{-1}\sqrt{3} \iff \textbf{cot}\ y = \sqrt{3}$ و $0 < y < \pi$

إذن $y = \pi/6$

نظرية 4

الدالة $y = \text{Cot}^{-1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\frac{d}{dx}\text{Cot}^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

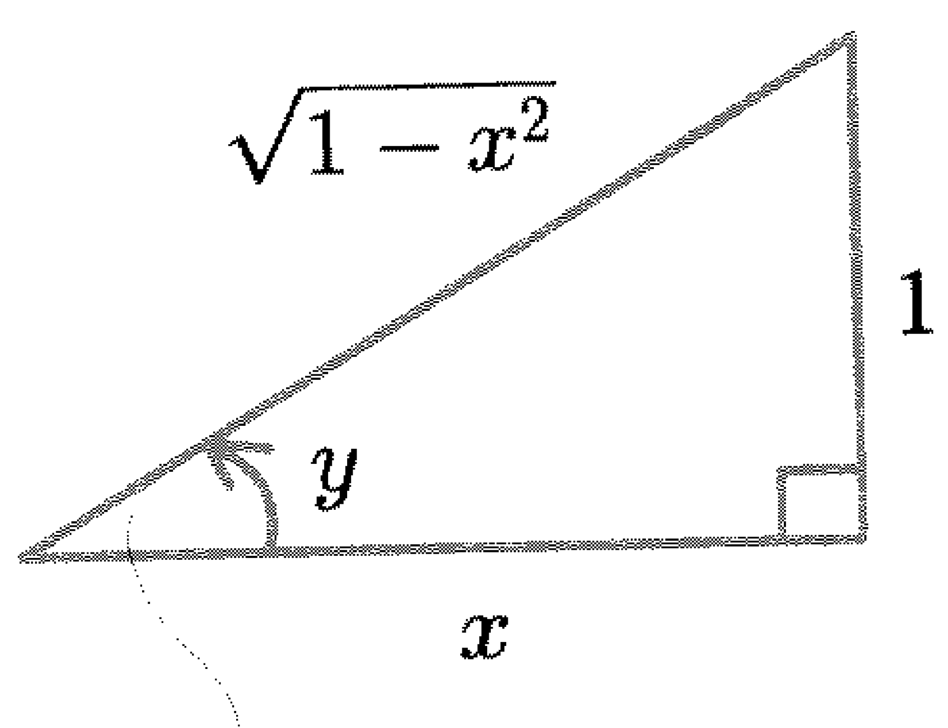
البرهان

لنفرض أن $y = \mathbf{Cot}^{-1}x \Longleftrightarrow \mathbf{cot}\ y = x$ ، $0 < y < \pi$.

وبتفاضل الطرفين نجد أن $1 = -\mathbf{csc}\ ^2 y \dfrac{dy}{dx}$

إذن $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\mathbf{csc}^2 y}$$

$$\mathbf{csc}\ y = \sqrt{1+x^2}$$



$$\mathbf{csc}\ ^2 y = 1 + x^2$$

إذن $$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}$$

ومعنى ذلك أن:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{Cot}^{-1}x = \frac{-1}{1+x^2}$$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Cot}^{-1}u = -\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

بعض العلاقات التي تربط معكوس الدوال المثلثية:

$$\mathbf{Cot}^{-1}x = \begin{cases} \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x > 0 \\ \pi + \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) & , \quad x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(2 $Csc^{-1}x = \mathbf{Sin}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ عندما $|x| \geq 1$.

3) $\mathbf{Sec}^{-1}x = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ عندما $|x| \geq 1$.

تستخدم هذه العلاقات في البرهنة على بعض الصيغ التالية:

بعض التكاملات

1) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathbf{Sin}^{-1}u + C$.

2) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\mathbf{Cos}^{-1}u + C$.

3) $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathbf{Tan}^{-1}u + C$.

4) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \mathbf{Sec}^{-1}|u| + C$.

5) $\int \frac{-du}{u\sqrt{u^2-1}} = Csc^{-1}|u| + C$.

6) $\int \frac{-du}{1+u^2} = \mathbf{Cot}^{-1}u + C$

تمارين 4.8

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد ما يلي:

1) $\mathbf{Cot}^{-1}(-1)$

2) $\mathbf{Cot}^{-1}(0)$

3) $\mathbf{Cot}^{-1}(-\sqrt{3})$

4) $\sin\left[\mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)\right]$

5) أوضح أن $\mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{cot}\ (x)) = x$ كل $0 < x < \pi$.

6) أوضح أن $cot(\mathbf{Cot}^{-1}(x)) = x$ لكل x.

في التمارين من 7 إلى 12، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

7) $f(x) = \mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right)$

8) $g(x) = \mathbf{Sin}^{-1}\frac{2}{x} + \mathbf{Cot}^{-1}\frac{x}{2}$

9) $f(x) = \mathbf{Tan}^{-1}(e^x)$

10) $g(x) = \mathbf{Sin}^{-1}[\mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{ln}\ x)]$

11) $f(x) = \mathbf{Cot}^{-1}(x^2+5)$

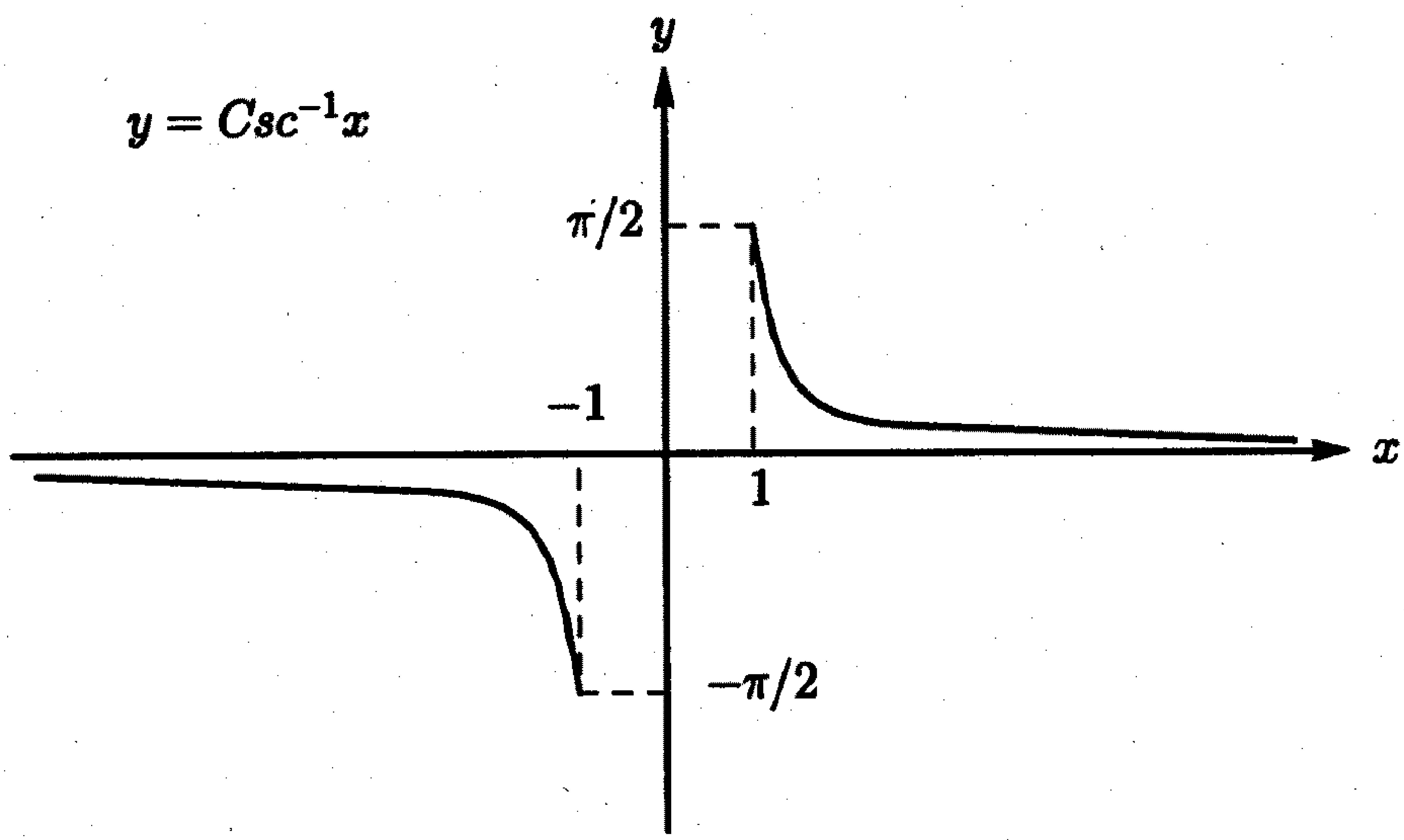
12) $g(x) = \mathbf{Cot}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)$

5.8 دالتا معكوس قاطع وقاطع التمام والمشتقة الأولى لهما

تعريف 5.8

تعرّف الدالة $Csc^{-1}x$ كما يلي:

$y = Csc^{-1}x$ إذا وإذا كان فقط $x = \csc y$ و $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ ، $y \neq 0$، $|x| \geq 1$.



شكل 5.8

مثال 8

أوجد $Csc^{-1}(\sqrt{2})$.

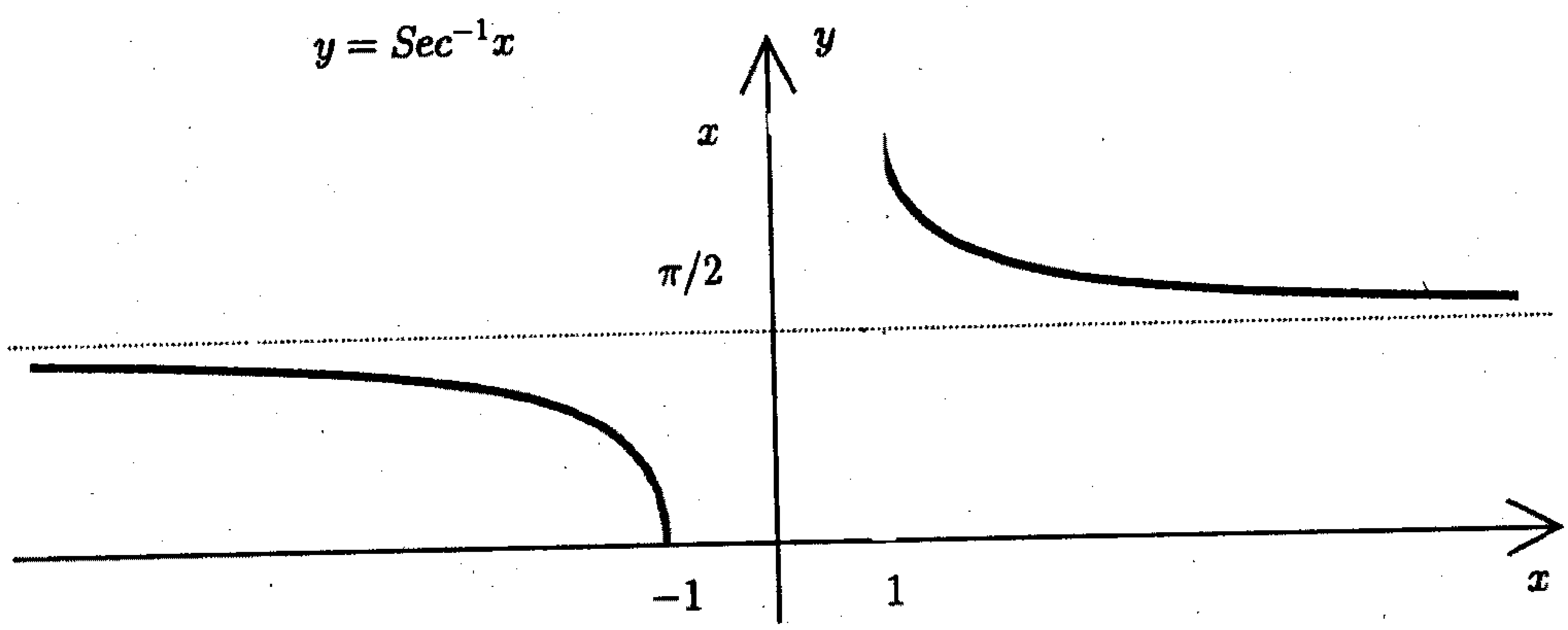
الحل

لنفرض أن $y = Csc^{-1}\sqrt{2} \Longleftrightarrow \csc y = \sqrt{2}$ و $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ و $y \neq 0$ إذن $y = \pi/4$.

تعريف 6.8

تعرّف الدالة $\text{Sec}^{-1}x$ كما يلي:

$y = \text{Sec}^{-1}x$ إذا وفقط إذا كان $x = \sec y$ و $0 \le y \le \pi$ ، $y \ne \pi/2$،
$|x| \ge 1$.



الشكل 6.8

مثـــال 9

أوجد $\text{Sec}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

الحـــل

$y = \text{Sec}^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}} \iff \sec y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ و $0 \le y \le \pi$ و $y \ne \pi/2$.

إذن $y = \pi/6$.

المشتقة الأولى للدالتين Csc^{-1} و $\text{Sec}^{-1}u$

$$\frac{d}{dx}Csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}u = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}.\frac{du}{dx}$$

حيث u دالة في x.

مثـال 10

أوجد $\frac{d}{dx}Csc^{-1}\sqrt{x}$.

الحـل

لنفرض أن $u=\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

إذن

$$\frac{d}{dx}Csc^{-1}\sqrt{x} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

مثـال 11

أوجد $\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}(4x+2)$.

الحـل

لنفرض أن $u=4x+2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=4$

إذن

$$\frac{d}{dx}\text{Sec}^{-1}(4x+2) = \frac{4}{|4x+2|\sqrt{4x+2)^2-1}}$$

مثـال 12

أوجد $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

الحـل

$$\int \frac{dx}{a^2[1+x^2/a^2]} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\mathbf{Tan}^{-1}(\frac{x}{a}) + C$$

مثـال 13

أوجد $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

الحـل

لنفرض أن $u = x^3 \Longrightarrow du = 3x^2dx$ أو $\frac{du}{3} = x^2dx$

إذن

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3}\mathbf{Sin}^{-1}u + C = \frac{1}{3}\mathbf{Sin}^{-1}x^3 + C.$$

مثـال 14

أوجد $\int \frac{e^{-x}dx}{4+e^{-2x}}$.

الحـل

لنفرض أن $-du = e^{-x}dx \Longleftarrow u = e^{-x}$

إذن

$$\int \frac{e^{-x}dx}{4+e^{-2x}} = -\int \frac{du}{4+u^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{1+(u/2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{Tan}^{-1}\frac{u}{2} + C = -\frac{1}{2}\mathbf{Tan}^{-1}\left(\frac{e^{-x}}{2}\right) + C$$

مثـــال 15

أوجد $\int_{-6}^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

الحـــل

$$\int_{-6}^{-3\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3}\int_{-6}^{-3\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{(x/3)^2-9}} = \frac{1}{3}\mathbf{Sec}^{-1}\left|\frac{x}{3}\right|\Big|_{-6}^{-3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{3}[\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{2} - \mathbf{sec}^{-1}2] = \frac{1}{3}(-\frac{\pi}{12}) = -\frac{\pi}{36}$$

مثـــال 16

أوجد $\int \frac{dx}{1+(3-x)^2}$.

الحـــل

لنفرض أن $du = -dx \Longleftarrow u = 3 - x$

الآن

$$\int \frac{dx}{1+(3-x)^2} = \int \frac{-du}{1+u^2} = \mathbf{Cot}^{-1}u + C = \mathbf{Cot}^{-1}(3-x) + C$$

تمارين 5.8

في التمارين من 1 إلى 15، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1 $\mathbf{Sec}^{-1}(-2)$

(2 $Csc^{-1}\sqrt{2}$

(3 $Csc^{-1}(-\sqrt{2})$

(4 $\mathbf{sec}\ (Csc^{-1}\sqrt{2})$

(5 $\mathbf{sec}\left(2\mathbf{Sin}^{-1}\frac{1}{8}\right)$

(6 برهن على أن $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{sec}\ x) = x$ حيث $x \neq \pi/2$ ، $0 \leq x \leq \pi$.

(7 برهن على أن $\mathbf{sec}\ (\mathbf{Sec}^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.

(8 برهن على أن $Csc^{-1}(\mathbf{csc}\ x) = x$ حيث $x \neq 0$ ، $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

(9 برهن على أن $\mathbf{csc}\ (Csc^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.

في التمارين من10 إلى 17، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

(10 $f(x) = Csc^{-1}(\mathbf{ln}\ x^2)$

(11 $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{cot}\ x)$

(12 $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(4x+2)$

(13 $g(x) = x^2\mathbf{Sec}^{-1}x^2$

(14 $f(x) = \dfrac{Csc^{-1}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

(15 $g(x) = \dfrac{\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{x}}{x^2+1}$

(16 $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(x^2+9)$

(17 $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

في التمارين من 18 إلى 20، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل حالة:

(18 $\mathbf{Sec}^{-1}x + \mathbf{Csc}^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$

(19 $\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{y} + x^2 = x - 1$

(20 $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{ln}\ y) + \mathbf{ln}\ (x+1) = 1$