جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قوانين المشتقة الثالثة والرابعة وهكذا

the properties of
logarithms

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

تمارين 5.8

في التمارين من 1 إلى 15، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Sec}^{-1}(-2)$ 2) $Csc^{-1}\sqrt{2}$

3) $Csc^{-1}(-\sqrt{2})$ 4) $\mathbf{sec}\ (Csc^{-1}\sqrt{2})$

5) $\mathbf{sec}\left(2\mathbf{Sin}^{-1}\frac{1}{8}\right)$

6) برهن على أن $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{sec}\ x) = x$ حيث $x \neq \pi/2$ ، $0 \leq x \leq \pi$.

7) برهن على أن $\mathbf{sec}\ (\mathbf{Sec}^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.

8) برهن على أن $Csc^{-1}(\mathbf{csc}\ x) = x$ حيث $x \neq 0$ ، $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

9) برهن على أن $\mathbf{csc}\ (Csc^{-1}x) = x$ لكل $|x| \geq 1$.

في التمارين من10 إلى 17، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

10) $f(x) = Csc^{-1}(\mathbf{ln}\ x^2)$ 11) $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{cot}\ x)$

12) $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(4x+2)$ 13) $g(x) = x^2\mathbf{Sec}^{-1}x^2$

14) $f(x) = \dfrac{Csc^{-1}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ 15) $g(x) = \dfrac{\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{x}}{x^2+1}$

16) $f(x) = \mathbf{Sec}^{-1}(x^2+9)$ 17) $g(x) = \mathbf{Sec}^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

في التمارين من 18 إلى 20، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل حالة:

18) $\mathbf{Sec}^{-1}x + \mathbf{Csc}^{-1}y = \dfrac{\pi}{2}$ 19) $\mathbf{Sec}^{-1}\sqrt{y} + x^2 = x - 1$

20) $\mathbf{Sec}^{-1}(\mathbf{ln}\ y) + \mathbf{ln}\ (x+1) = 1$

تمارين على الفصل الثامن

في التمارين من 1 إلى 10، أوجد ما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

1) $\mathbf{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\mathbf{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) $\mathbf{Tan}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4) $\mathbf{sin}\left(\mathbf{Cot}^{-1}\dfrac{3}{5}\right)$

5) $\mathbf{Tan}^{-1}\left(\mathbf{sin}\ \dfrac{\pi}{3}\right)$

6) $\mathbf{sin}\left(\mathbf{Cot}^{-1}\dfrac{1}{5}\right)$

7) $\mathbf{sin}\ (\mathbf{Tan}^{-1}0)$

8) $\mathbf{sin}\ (Csc^{-1}4)$

9) $\mathbf{Sec}^{-1}(-2)$

10) $Csc^{-1}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

في التمارين من 11 إلى 20، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

11) $y = \mathbf{Tan}^{-1}(x-4)^2$

12) $y = \mathbf{Sin}^{-1}(3x)$

13) $y = x^2\mathbf{Cos}^{-1}(1-x)$

14) $y = \mathbf{ln}\ (\mathbf{Sin}^{-1}(e^{-x}))$

15) $y = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\dfrac{x^3+1}{x^5}\right)$

16) $y = \mathbf{Tan}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

17) $y = \mathbf{ln}\ (\mathbf{Tan}^{-1}x)$

18) $y = \mathbf{Tan}^{-1}(\mathbf{ln}\ x)$

19) $y = Csc^{-1}(\mathbf{ln}\ x)$

20) $y = \mathbf{Cot}^{-1}(\mathbf{sec}\ x)$

21) برهن على أن $\mathbf{Sec}^{-1}x = \mathbf{Cos}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$، عندما يكون $|x| \geq 1$.

22) برهن على أن $Csc^{-1}x = \mathbf{Sin}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$، عندما يكون $|x| \geq 1$.

23) برهن على أن $\dfrac{d}{dx}\mathbf{Sec}^{-1}x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

24) برهن على أن $\dfrac{d}{dx}Csc^{-1}x = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

في التمارين من 25 إلى 40، أوجد التكاملات المذكورة:

(25 $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

(26 $\int \frac{x^3}{x^8+1}dx$

(27 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

(28 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}dx$

(29 $\int \frac{e^{-x}}{4+e^{-2x}}dx$

(30 $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}dx$

(31 $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}dx$

(32 $\int \frac{\cos\,(x/2)}{1+\sin^2(x/2)}dx$

(33 $\int \frac{\csc\, x\, \cot\, x}{1+9\csc^{\,2} x}dx$

(34 $\int_0^2 \frac{2dx}{\sqrt{8-x^2}}$

(35 $\int \frac{du}{u\sqrt{9u^2-100}}$

(36 $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{\sqrt{12-x^2}}$

(37 $\int \frac{x\mathrm{Sin}^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(38 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{1-\cot^{\,2} x}}$

(39 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{9+x^4}$

(40 $\int \frac{\cot^{\,-1} x}{1+x^2}dx$

الفصل التاسع

الدوال الزائدية

The Hyperbolic Functions

تظهر في التطبيقات الفيزيائية دوال، هي تركيبة خطية للدالتين e^x و e^{-x}، وهناك تركيبات من هاتين الدالتين كثيرة الاستخدام، ولهذا أعطي لها اسم خاص.

1.9 دالتا الجيب وجيب التمام الزائدية

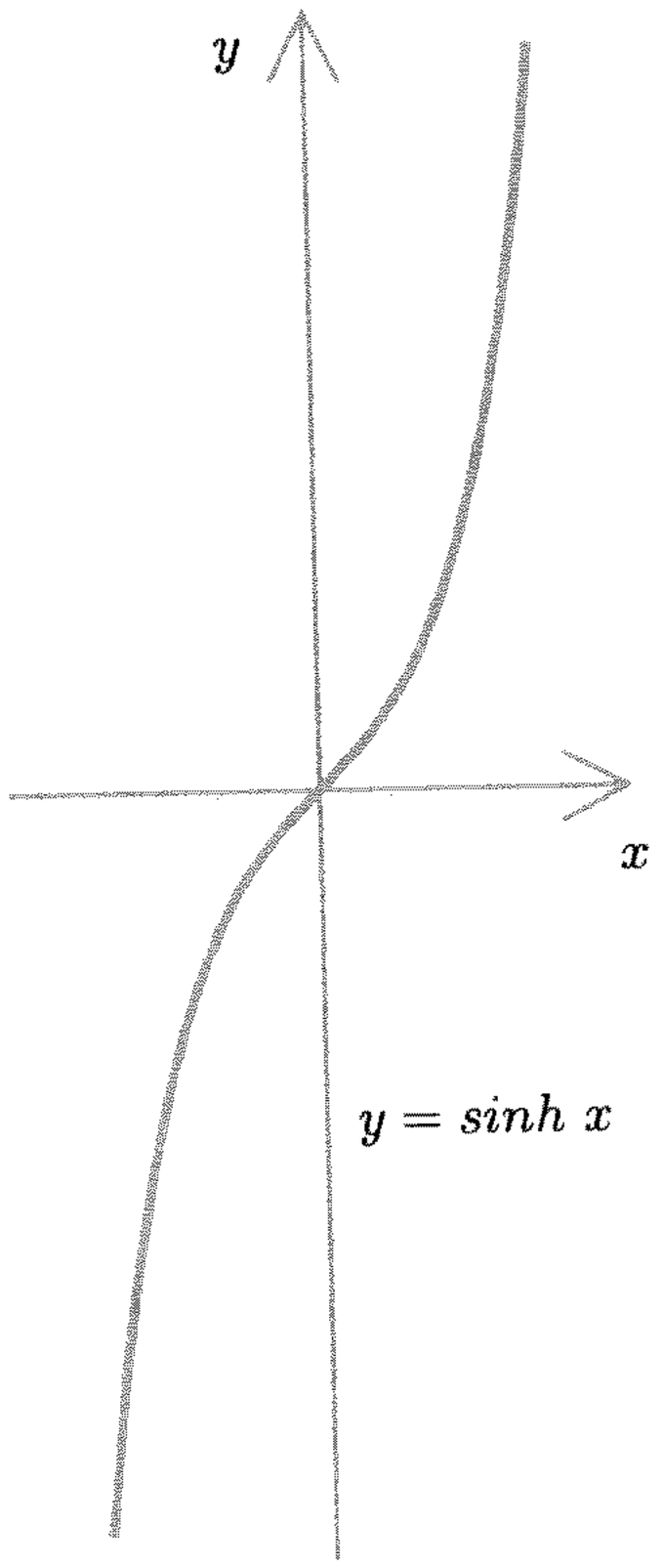
تعريف 1.9

1) دالة الجيب الزائدية: وهي الدالة

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) دالة جيب التمام الزائدية: وهي الدالة

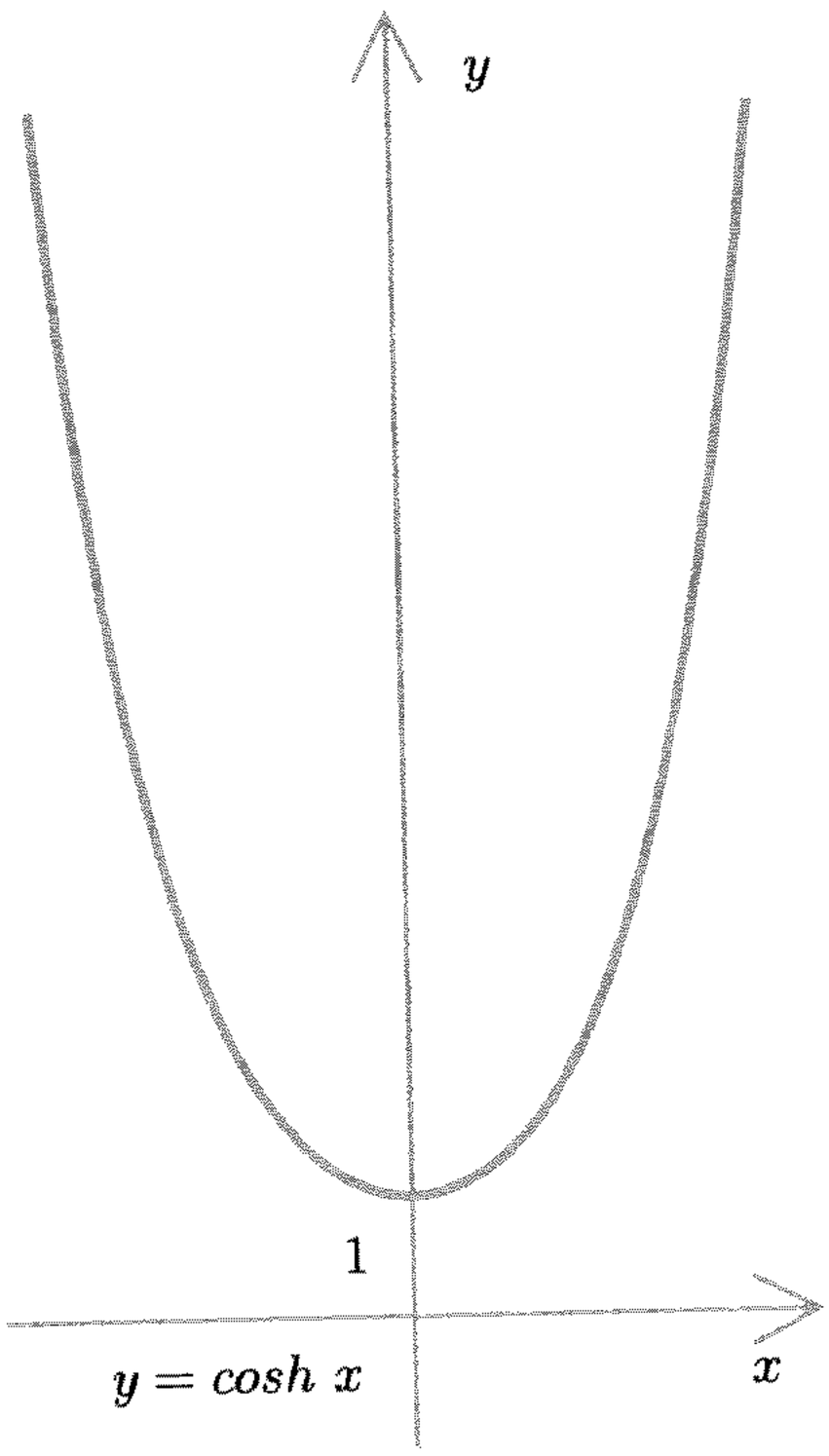
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



الشكل 1.9

نطاق $\sinh(x)$ هو $\mathbb{R}$

مدى $\sinh(x)$ هو $\mathbb{R}$



الشكل 2.9

نطاق $\cosh(x)$ هو $\mathbb{R}$

مدى $\cosh(x)$ هو $\{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$

تمارين 1.9

1) أثبت أن $\sinh(-x) = -\sinh(x)$

2) أثبت أن $\cosh(-x) = \cosh(x)$

3) أثبت أن $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

4) أثبت أن $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

5) أثبت أن $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$

6) أثبت أن $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$.

7) أثبت أن $\sinh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{2x}$

8) أثبت أن $\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

9) أثبت أن $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$، حيث n عدد صحيح موجب.

10) أثبت أن $e^x = \sinh x + \cosh x$.

2.9 المشتقة الأولى لدالتي الجيب وجيب التمام الزائدية

نظرية 1

الدالة $y = \sinh(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$

البرهان

بما أن $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

فإن $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

نظرية 2

الدالة $y = \cosh(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$

البرهان

بما أن $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

فإن $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

بصفة عامة:

$$\frac{d}{dx}\sinh(u) = \cosh(u).\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh(u) = \sinh(u).\frac{du}{dx}$$

من النظريتين السابقتين، نجد أن:

$$\int \mathbf{sin}h\ (u)du = \mathbf{cos}h\ (u) + C$$

$$\int \mathbf{cos}h\ (u)du = \mathbf{sin}h\ (u) + C$$

مثـــال 1

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = \mathbf{cos}h\ (x^3 - 1)$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^3 - 1$

إذن $\frac{du}{dx} = 3x^2$

الآن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\mathbf{cos}h\ (u) = \mathbf{sin}h\ (u).\frac{du}{dx} = \mathbf{sin}h\ (x^3 + 1).3x^2$$

$$= \mathbf{3}x^2\mathbf{sin}h\ (x^3 + 1)$$

مثـــال 2

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y = x\mathbf{sin}h\ (3x^2)$.

الحـــل

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d}{dx}\mathbf{sin}h\ (3x^2) + \mathbf{sin}h\ (3x^2)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= 6x^2\mathbf{cos}h\ (3x^2) + \mathbf{sin}h\ (3x^2)$$

متطابقة

$$\mathbf{cos}h^2(x) - \mathbf{sin}h^2(x) = 1$$

البرهان

ضع $\mathbf{sin}h\ (x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \mathbf{cos}h\ (x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

فإن

$$\mathbf{cos}h^2(x) - \mathbf{sin}h^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

إذن

$$\mathbf{cos}h^2(x) - \mathbf{sin}h^2(x) = 1$$

تمارين 2.9

في التمارين من 1 إلى 6، أوجد المشتقة الأولى للدالة المعطاة:

1) $f(x) = \mathbf{sin}h\ (3x^2 + 5)$

2) $g(x) = \mathbf{cos}h\ (\mathbf{ln}\ x)$

3) $f(x) = \mathbf{cos}h\ \frac{1}{x}$

4) $g(x) = e^{\mathbf{cos}h\ (x)}$

5) $f(x) = \mathbf{sin}^{-1}(\mathbf{cos}h\ x)$

6) $g(x) = e^{\mathbf{sin}h\ (x)}$

في التمارين من 7 إلى 12، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في كل حالة:

7) $x^2 = \mathbf{sin}h\ y$

8) $\mathbf{sin}h\ y = \mathbf{cos}h\ x$

9) $\mathbf{sin}x\ = \mathbf{cos}h\ y$

10) $\mathbf{sin}h\ (\mathbf{ln}\ x) = y^2 - 1$

11) $y = \mathbf{cos}h\ (\mathbf{ln}\ x)$

12) $y = \mathbf{ln}\ (\mathbf{sin}h\ x^3)$

في التمارين من 13 إلى 20، احسب التكامل المعطى في كل حالة:

(13 $\int \mathbf{sin}h\,\frac{2x}{3}\,dx$

(14 $\int \frac{\mathbf{sin}h\,(3x)}{\mathbf{cos}h\,(3x)}\,dx$

(15 $\int \mathbf{sin}h^{11}(2x)\mathbf{cos}h\,(2x)dx$

(16 $\int \mathbf{cos}h^{3}(x)\mathbf{sin}h\,(x)dx$

(17 $\int e^{\mathbf{sin}h\,(x)}\mathbf{cos}h\,(x)dx$

(18 $\int x^{2}\mathbf{sin}h\,(x^{3})dx$

(19 $\int \frac{\mathbf{cos}h\,(3x)}{1+\mathbf{sin}h\,(3x)}\,dx$

(20 $\int \frac{\mathbf{cos}h\,(1/x^{4})}{x^{5}}\,dx$

3.9 بقية الدوال الزائدية

تعريف 2.9

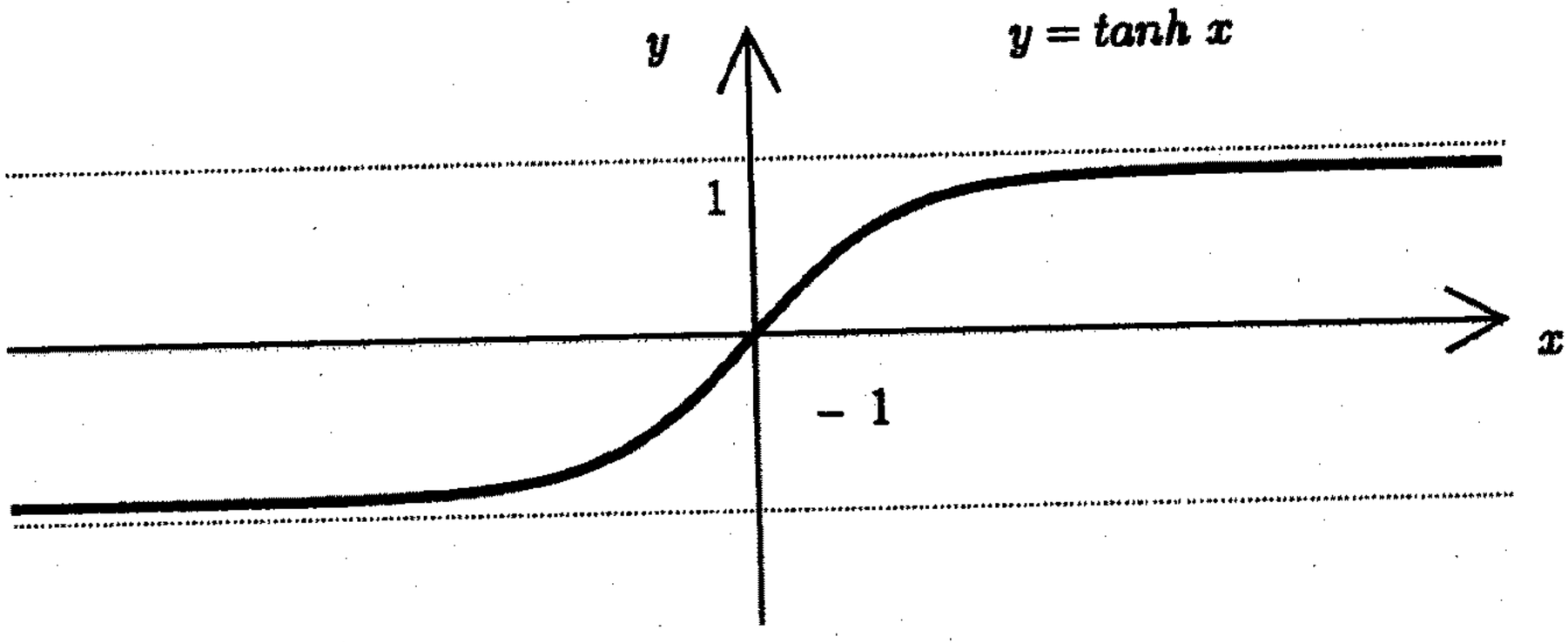
تعرّف بقية الدوال الزائدية كما يلي:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (1$$

$$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (2$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (3$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (4$$



الشكل 3.9

نطاق $\tanh(x)$ هو $\mathbb{R}$ مدى $\tanh(x)$ هو $(-1, 1)$