جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

قواعد عن الدوال الهندسية

Introduction, Critical Points and Minimum and Maximum Values

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

3.9 بقية الدوال الزائدية

تعريف 2.9

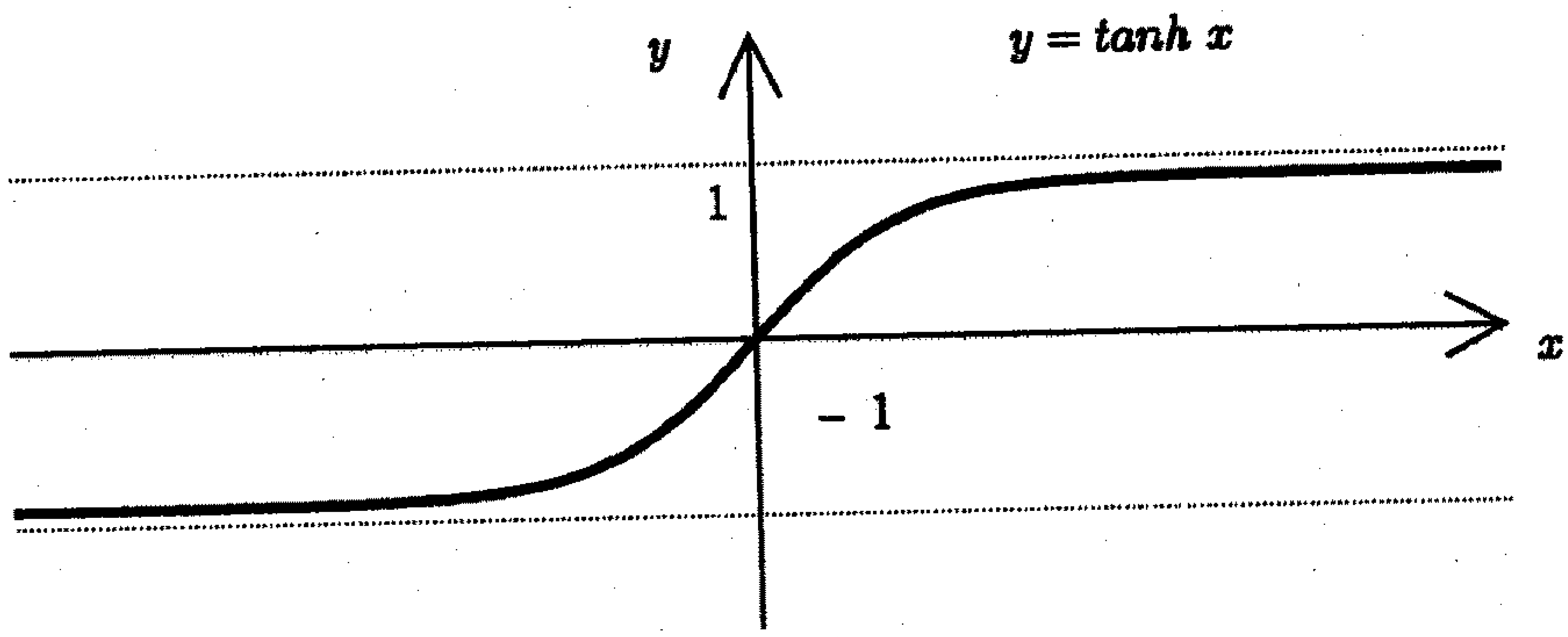
تعرّف بقية الدوال الزائدية كما يلي:

1) $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

2) $$\coth(x) = \frac{1}{\tanh(x)} = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

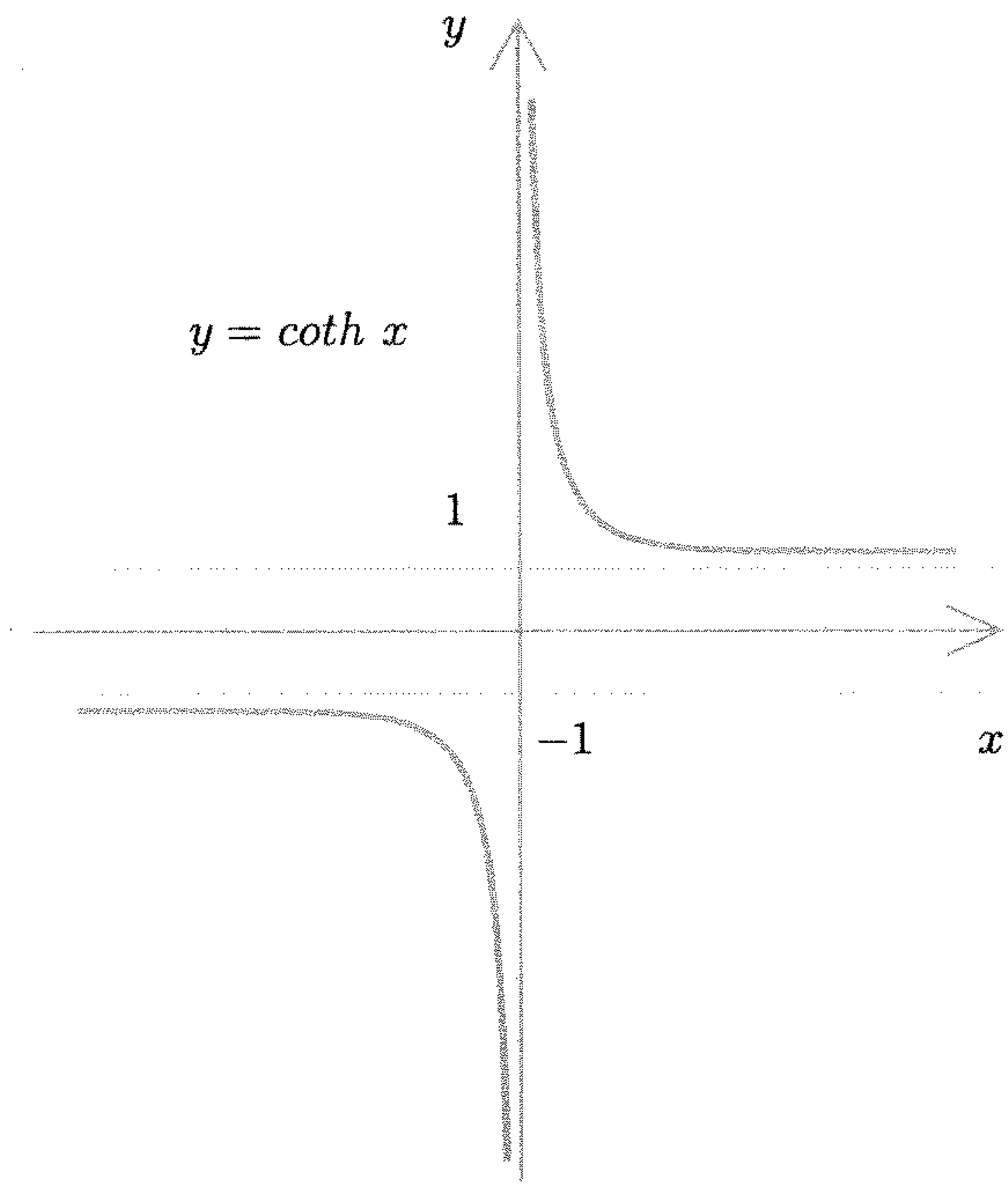
3) $$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

4) $$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$



الشكل 3.9

نطاق $\tanh(x)$ هو $\mathbb{R}$ مدى $\tanh(x)$ هو $(-1,1)$

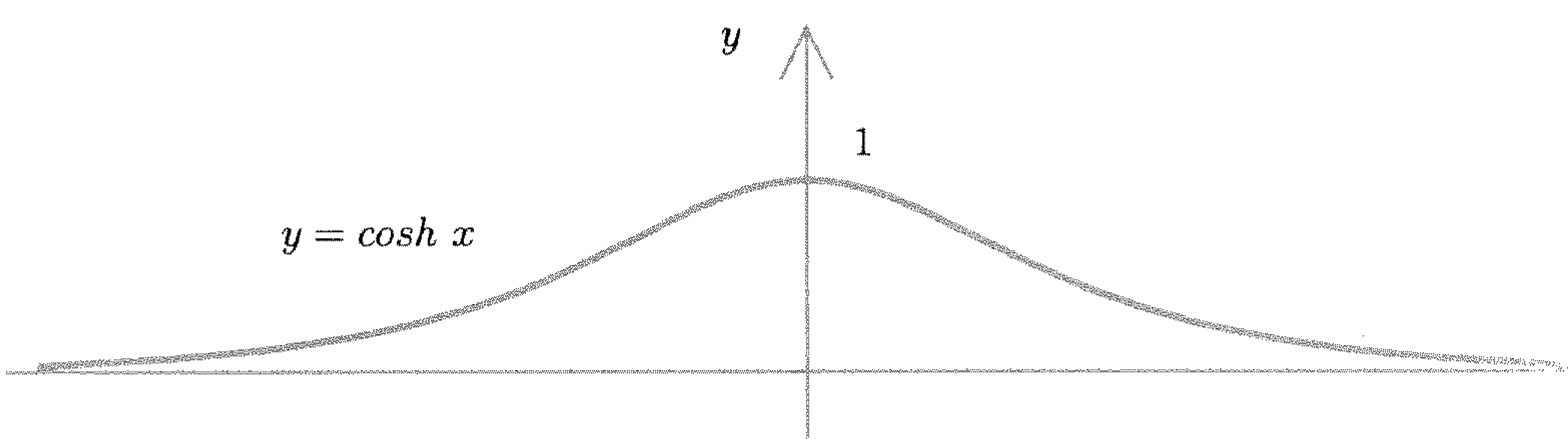


الشكل 4.9

نطاق $\coth(x)$ هو $\mathbb{R}-\{0\}$

مدى $\coth(x)$

هو $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

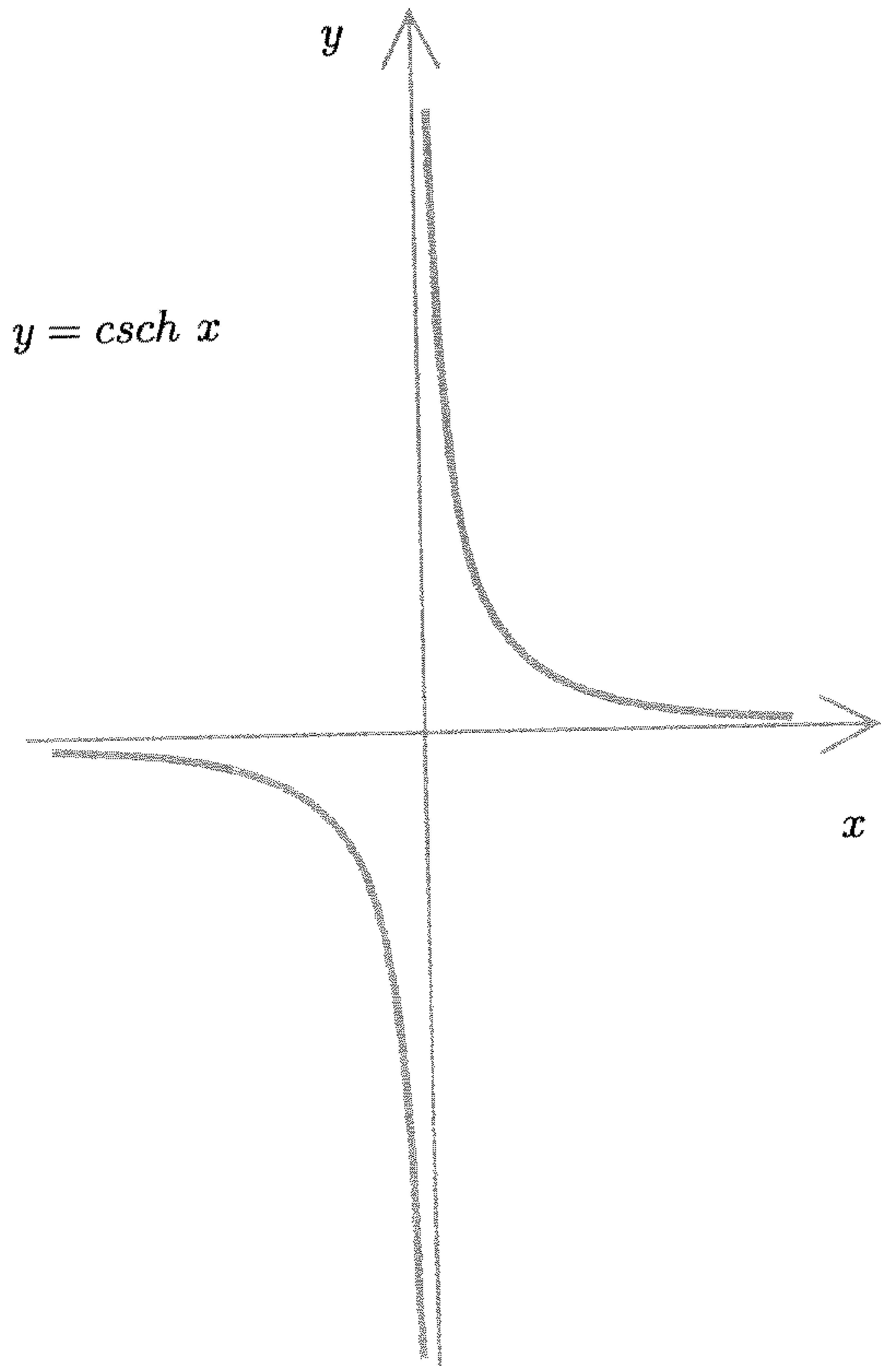


الشكل 5.9

نطاق $\text{sech}(x)$ هو $\mathbb{R}$ مدى $\text{sech}(x)$ هو $(0,1]$

نطاق $\mathbf{csch}(x)$ هو $\mathbb{R}-\{0\}$

مدى $\mathbf{csch}(x)$ هو $\mathbb{R}-\{0\}$



الشكل 6.9

تمارين 3.9

1) أثبت أن $1-\mathbf{tanh}^2 x=\mathbf{sech}^2 x$.

2) أثبت أن $\mathbf{coth}^2 x-1=\mathbf{csch}^2 x$.

3) أوجد $\mathbf{tanh}(x)$ إذا كان $\mathbf{sech}(x)=\dfrac{3}{8}$.

4) أوجد $\mathbf{csch}(x)$ إذا كان $\mathbf{coth}(x)=\dfrac{3}{2}$.

5) إذا كان $\mathbf{csch}(x)=5$، أوجد بقية الدوال الزائدية.

4.9 تفاضل وتكامل بقية الدوال الزائدية

1) $$\frac{d}{dx}\mathbf{tan}h(u) = \mathbf{sech}^2(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك

$$\int \mathbf{sech}^2(u)du = \mathbf{tan}h(u) + c$$

2) $$\frac{d}{dx}\mathbf{cot}h(u) = -\mathbf{csch}^3(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك

$$\int \mathbf{csch}^2(u)du = -\mathbf{cot}h(u) + c$$

3) $$\frac{d}{dx}\mathbf{sech}(u) = -\mathbf{sech}(u)\mathbf{tan}h(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك:

$$\int \mathbf{sech}(u)\mathbf{tan}h(u)du = -\mathbf{sech}(u) + C$$

4) $$\frac{d}{dx}\mathbf{csch}(u) = -\mathbf{csch}(u)\mathbf{cot}h(u)\frac{du}{dx}$$

ومن ذلك:

$$\int \mathbf{csch}(u)\mathbf{cot}h(u)du = -esch(u) + C$$

مثـــال 3

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x\mathbf{tan}h\frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

ناقش اتصالية الدالة f وكذلك قابليتها للاشتقاق.

الحـــل

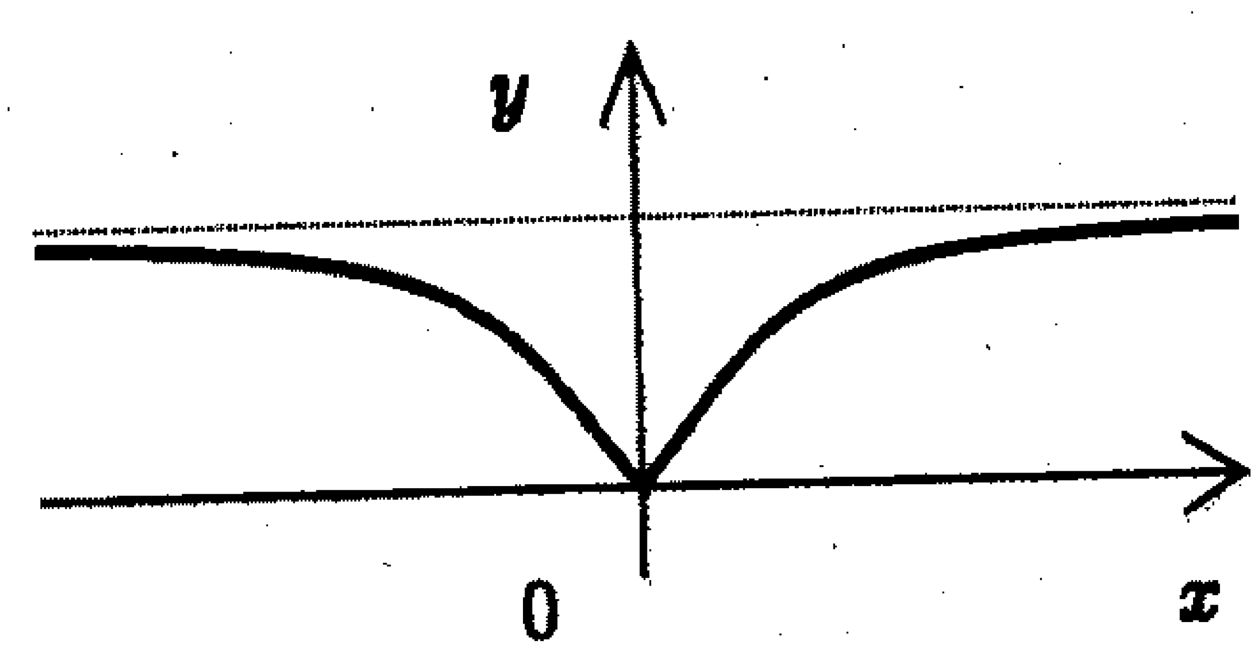
من بيان الدالة f نلاحظ أن الدالة f متصلة عند $x = 0$، وبالتالي تكون الدالة f

متصلة على $\mathbb{R}$.

لكن $\quad f'(x) = \tanh\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\operatorname{Sech}^2\frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$

من البيان نلاحظ أيضاً أن f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

هذا مثال آخر يوضح أن الاتصالية عند نقطة لا تؤدي للاشتقاق عند تلك النقطة.



تمارين 4.9

1) برهن على أن $\frac{d}{dx}\tanh(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

2) برهن على أن $\frac{d}{dx}\coth(x) = -\operatorname{csch}^2(x)$.

في التمارين من 3 إلى 10، أوجد التفاضل أو التكامل المعطى:

3) $\frac{d}{dx}d^{\tanh(x)}$

4) $\frac{d}{dx}\operatorname{csch}(\ln x)$

5) $\frac{d}{dx}\sin(\sinh x)$

6) $\frac{d}{dx}\tan(\operatorname{csch} x)$

7) $\int \frac{\operatorname{sech}(1/x)dx}{x^2}$

8) $\int \frac{\operatorname{csch}^2(x)dx}{\sqrt[3]{\coth(x)}}$

9) $\int \operatorname{sech}^{11/3}(x)\tanh(x)dx$

10) $\int \frac{\operatorname{sech}^2(\sqrt{x})dx}{\sqrt{x}}$

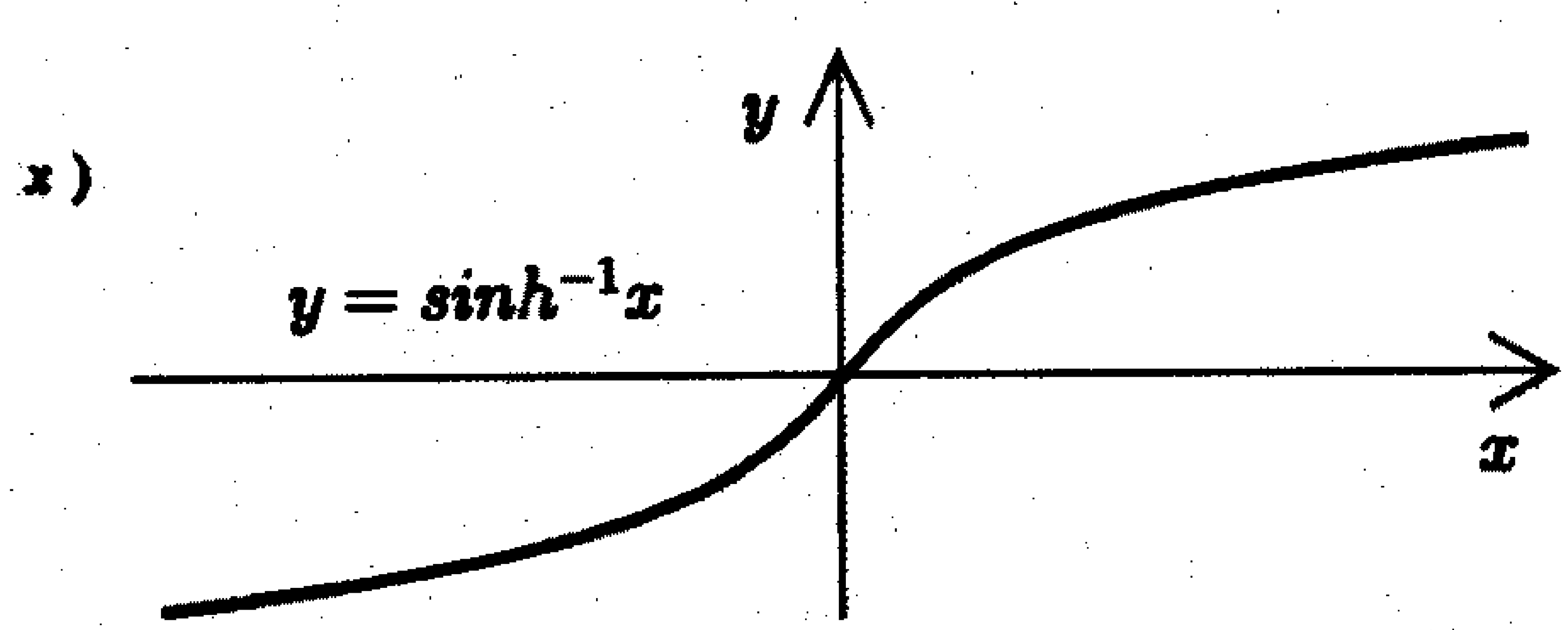
5.9 معكوس الدوال الزائدية Inverse Hyperbolic Functions

الدالة $y = \sinh x$ دالة أحادية، ولذلك فإن لها معكوساً.

تعريف 3.9

تعرّف دالة معكوس الجيب الزائدي بأنها:

$y = \sinh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \sinh(y)$.



الشكل 7.9

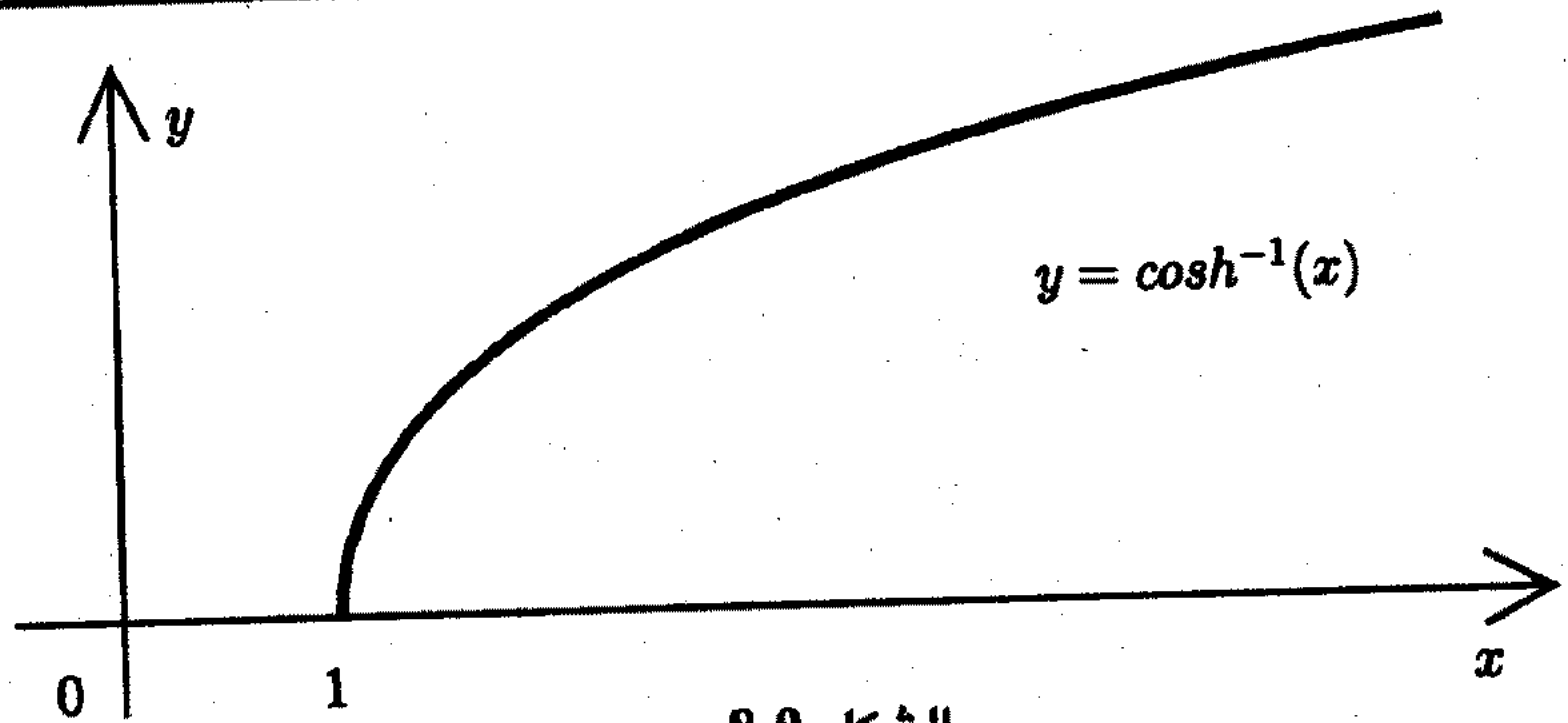
نطاق $\sinh^{-1}(x)$ هو $\boldsymbol{R}$ مدى $\sinh^{-1}(x)$ هو $\boldsymbol{R}$

بما أن الدالة $\cosh(x)$ ليست أحادية، فلا بد من تقييد نطاقها حتى يكون لها معكوس.

تعريف 4.9

تعرّف دالة معكوس الجيب التمام الزائدي بأنها:

$y = \cosh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \cosh(y)$ ، $y \geq 0$.



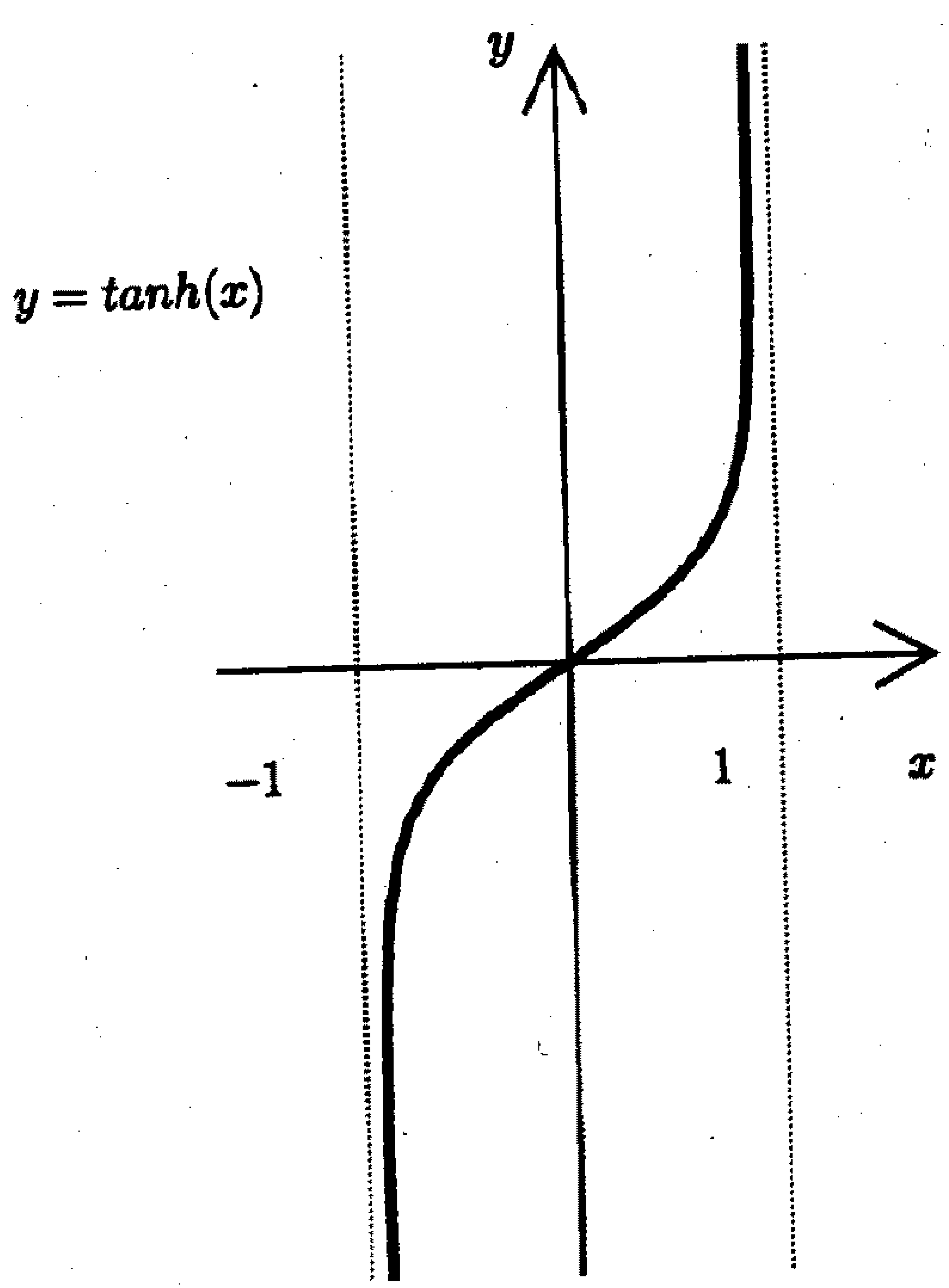
الشكل 8.9

نطاق $\cosh^{-1}(x)$ هو $[1,\infty)$ مدى $\cosh^{-1}(x)$ هو $[0,\infty)$

تعريف 5.9

تعرّف دالة معكوس الظل الزائدي بأنها:

$y = \tanh^{-1}(x)$ إذا وإذا كان فقط $x = \tanh(y)$.



الشكل 9.9

نطاق $\tanh^{-1}(x)$ هو $(-1,1)$

مدى $\tanh^{-1}(x)$ هو $\mathbb{R}$

تمارين 5.9

1) أوضح أن $\mathbf{sin}h^{-1}(x) = \mathbf{ln}\ (x + \sqrt{x^2 - 1}$.

2) برهن على أن $\mathbf{cos}h^{-1}(x) = \mathbf{ln}\ (x + \sqrt{x^2 - 1})$

3) برهن على أن $\mathbf{tan}h^{-1}(x) = \frac{1}{2}\mathbf{ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

4) أوجد ما يلي:

أ) $\mathbf{sin}h^{-1}(2)$ ب) $\mathbf{cos}h^{-1}(4)$ $\mathbf{tan}h^{-1}(1/2)$

5) ارسم بيانياً الدوال التالية:

أ) $y = -\mathbf{cos}h^{-1}x$ ب) $y = x - \mathbf{cos}h^{-1}x$

ج) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{sin}h\ x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

6.9 المشتقة الأولى لمعكوس الدوال الزائدية

1) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ حيث $x > 1$.

3) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2}$ حيث $-1 < x < 1$.

البرهان

نبرهن (1) فقط ونترك البقية كتمارين.

$$x = \sinh(y) \iff y = \sinh^{-1}(x)$$

بتفاضل الطرفين، نجد أن:

$$1 = \cosh(y)\frac{dy}{dx}$$

إذن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)}$$

عرفنا فيما سبق أن

$$\cosh^2(y) = \sinh^2(y) + 1 = x^2 + 1$$

$$\cosh(y) = \pm\sqrt{x^2+1}$$

ولكن $\cosh(y) \geq 0$

إذن $\cosh(y) = \sqrt{x^2+1}$

بالرجوع إلى $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh(y)}$، نجد أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{sinh}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثـــال 4

أوجد $\frac{d}{dx}\mathbf{cosh}^{-1}(x^2+e^x)$.

الحـــل

لنفرض أن $u = x^2 + e^x \Leftarrow \frac{du}{dx} = 2x + e^x$

$$\frac{d}{dx}\mathbf{cosh}^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}\mathbf{cosh}^{-1}(x^2+e^x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+e^x)^2-1}}(2x+e^x)$$
$$= \frac{2x+e^x}{\sqrt{(x^2+e^x)^2-1}}$$

مثـــال 5

أوجد $\frac{d}{dx}\mathbf{tanh}^{-1}(\mathbf{tan}\ x)$.

الحـــل

لنفرض أن $u = \mathbf{tan}\ x \Leftarrow \frac{du}{dx} = \mathbf{sec}^2 x$

ولهذا فإن:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{tanh}^{-1}(u) = \frac{1}{1-u^2}\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-\mathbf{tan}^2 x}\mathbf{sec}^2 x = \frac{\mathbf{sec}^2 x}{1-\mathbf{tan}^2 x}$$

مثـــال 6

أوجد $\frac{d}{dx}[\mathbf{sinh}^{-1}(x+1)\mathbf{cosh}^{-1}(x+2)]$.

الحـل

$$\frac{d}{dx}[\sinh^{-1}(x+1)\cosh^{-1}(x+2)]$$

$$=\sinh^{-1}(x+1)\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x+2)$$
$$+\cosh^{-1}(x+2)\frac{d}{dx}\sinh^{-1}(x+1)$$

$$=\sinh^{-1}(x+1)\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2-1}}$$
$$+\cosh^{-1}(x+2)\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$

$$=\frac{\sinh^{-1}(x+1)}{\sqrt{x^2+4x+3}}+\frac{\cosh^{-1}(x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

تمارين 6.9

في التمارين من 1 إلى 7، أوجد المشتقة الأولى للدوال المعطاة:

1) $y=\cosh^{-1}(x)$

2) $y=\sinh^{-1}(\ln x)$

3) $y=\sinh^{-1}(\cosh x)$

4) $y=\tanh^{-1}(\ln x)$

5) $y=\sqrt[3]{\sinh^{-1}(x)}$

6) $y=\ln\sqrt{x^2-1}-x\tanh^{-1}(x)$

7) $y=\tanh^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

8) برهن على أن $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ إذا كان $x>1$.

9) برهن على أن $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{1-x^2}$ إذا كان $-1<x<1$.