جامعة الانبار
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم أنظمة شبكات الحاسوب

رياضيات ١

Mathematics 1

بعض قواعد النهايات العظمى والصغرى

Introduction, Critical Points and Minimum and Maximum Values

المرحلة الأولى – الفصل الاول

م.م. عدي عبد هزام

حيث $C = C_1 + C_2$.

(د) $\int \sec^n x dx$.

لإيجاد هذا التكامل، نستخدم التعويض التالي:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

مثال 9

أوجد $\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx$.

الحل

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx &= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x(1 + \tan^2 x) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x \, dx \\
&= \tan x \Big|_0^{\pi/4} + \tfrac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0\right) + \frac{1}{3}\left(\tan^3 \frac{\pi}{4} - \tan^3 0\right) \\
&= (1 - 0) + \frac{1}{3}(1 - 0) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan^2 x dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x d(\tan x) = \frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\pi/4}$$

(هـ) $\int \tan^m x \sec^n x dx$ حيث إن n عدد زوجي.

استخدم التعويض التالي: $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

مثال 10

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x \, dx$.

الحل

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x(1+\tan^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^2 x dx + \int_0^{\pi/3} \tan^7 x \sec^2 x\, dx$$

نفترض أن $u = \tan x$، ومن ذلك $du = \sec^2 x dx$.

إذن

$$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x dx = \frac{1}{6}\tan^6 x\Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{6}\left[(\sqrt{3})^6 - 0\right] + \frac{1}{8}\left[(\sqrt{3})^8 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{6}(27) + \frac{1}{8} = \frac{9}{2} + \frac{81}{8} = \frac{117}{8}$$

ملاحظة

$$\int_0^{\pi/3} \tan x \sec^4 x dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x(1+\sec^2 dx(\tan x\ )$$

$$= \int_0^{\pi/3} \tan^5 x(1+\tan^2 x)d(\tan x\ )$$

$$= \frac{1}{6}\tan\ \Big|_0^{\pi/3} + \frac{1}{8}\tan^8 x\Big|_0^{\pi/3}$$

(و) $\int \tan^m x \sec^n$ حيث أن n وm عددان فرديان.

استخدم الحد $\sec x \tan x$ لأن $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

وعوّض عن $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

مثـال 11

أوجد $\int_0^{\pi/3} \tan^3 x \sec^5 x dx$.

الحـل

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \int \tan x \sec x (\sec^2 x - 1)\sec^4 x dx$$
$$= \int \sec^6 x \tan x \sec x dx - \int \sec^4 x \tan x \sec x dx$$

نفترض أن $u = \sec x$، ومن ذلك $du = \sec x \tan x \, dx$.

إذن

$$\int \tan^3 x \sec^5 x dx = \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

تمارين 2.10

أوجد التكاملات الآتية:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

2) $\int \sin^{1/2} x \cos^3 x dx$

3) $\int \sec^3 5x dx$

4) $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$

5) $\int_0^{\pi/6} \sec^3 2x \tan 2x dx$

6) $\int_0^{\pi/4} \sec^3 2x \tan^3 2x dx$

7) $\int_0^{\pi/8} \tan^2 2x dx$.

8) $\int (\sec(3x) + \tan(3x))^2 dx$.

9) $\int \sqrt{\tan(7x)} \sec^4(7x) dx$.

10) $\int x^2 \tan^5(x^4) \sec^7(4x) dx$.

3.10 تكامل الدالة القياسية (طريقة الكسور الجزئية)

إذا كانت $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ عندما تكون $p(x)$ و$q(x)$ كثيرتي حدود، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة قياسية.

من أجل تكامل مثل هذه الدوال، نفترض الحالتين الآتيتين، وهما:

1) إذا كانت درجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$، نقوم بعملية قسمة مطولة للحصول على $\dfrac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\dfrac{t(x)}{q(x)}$

حيث $s(x)$ كثيرة حدود بدرجة أقل من درجة $q(x)$.

مثال 12

أوجد $\displaystyle\int \frac{x^4-x^5+4x-2}{x-2}\,dx$.

الحل

بالقسمة المطولة نجد أن

$$
\begin{array}{r|r}
 & x^3+x^2+2x+8 \\
\hline
x-2 & x^4-x^3+4x-2 \\
 & \underline{x^4-2x^3} \\
 & x^3+4x \\
 & \underline{x^3-2x^2} \\
 & 2x^2+4x \\
 & \underline{2x^2-4x} \\
 & 8x-2 \\
 & \underline{8x-16} \\
 & 14
\end{array}
$$

$$\frac{x^4 - x^3 + 4x - 2}{x-2} = x^3 + x^2 + 2x + 8 + \frac{14}{x-2}$$

إذن

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 4x - 2x - 2dx}{x-2} = \int (x^3 + x^2 + 2x + 8)dx + \int \frac{14dx}{x-2}$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 8x + 14 \ \mathbf{ln} \ |x-2| + C$$

2) إذا كانت درجة $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$، نحلل $q(x)$ إلى عوامل خطية $x - a$، أو عوامل تربيعية $x^2 + bx + c$.

إذا كان $q(x)$ على شكل $(x-a)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x-a)^k} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ولكل عامل تربيعي على شكل $(x^2 + bx + c)^k$ يكون الكسر الجزئي على شكل

$$\frac{p(x)}{(x^2+bx+c)^k} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2+bx+c)^2} +$$
$$\ldots + \frac{A_kx + B}{(x^2+bx+c)^k}$$

مثال 13

إذا كانت $q(x)$ دالة خطية، مثل $q(x) = ax + b$، فإن $\int \frac{dx}{ax+b}$ يمكن حسابه بالتعويض عن $u = ax + b$:

وبذلك يكون

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{3}\mathbf{ln} \ |ax+b| + C \ .$$

مثال 14

احسب $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

الحل

أولاً
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

بالضرب في $(x-1)(x-2)(x-3)$، نجد أن:

$$1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)$$

بوضع $x = 1$، نجد أن $A = 1/2$،

بوضع $x = 2$، نجد أن $B = -1$،

بوضع $x = 3$، $C = 1/2$.

إذن
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1} + \frac{-1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{[(x-1)(x-3)]^{1/2}}{(x-2)}\right| + C$$

مثال 15

احسب $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$.

الحـــل

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

بوضع $x=0$ ، نجد أن $A=1$،

بوضع $x=1$ ، نجد أن $C=1$.

الآن نضع $x=2$

$$1=A+2B+2C$$

$$1=1+2B+2$$

إذن $B=-1$.

إذن

$$\int\frac{dx}{x(x-1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$=\mathbf{ln}\ |x|-\mathbf{ln}\ |x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$

حيث أن C مقدار ثابت.

مثـــال 16

احسب $\int\frac{dx}{x^3+x}$

الحـــل

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned}1&=A(x^2+1)+x(Bx+C)\\&=Ax^2+A+Bx^2+C^x\\&=(A+B)x^2+Cx+A\end{aligned}$$

$$A+B=0 \Longrightarrow A=-B$$

$$C=0, A=1 \implies B=-1$$

$$\int \frac{dx}{x^3+x}=\int \frac{dx}{x}-\int \frac{xdx}{x^2+1}$$

$$\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$

تمارين 3.10

أوجد التكاملات التالية:

1) $\int \frac{x+2}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$

2) $\int \frac{x}{(x-4)^3}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$

4) $\int \frac{x^3}{(x-1)^3}dx$

5) $\int \frac{x}{x^4-1}dx$

6) $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

7) $\int \frac{x^4+2x^2+3}{x^3+4x}dx$

8) $\int \frac{5x^2+11x+17}{x^3+5x^2+4x+20}dx$

9) $\int \frac{x^6-x^3+1}{x^4+9x^2}dx$

10) $\int \frac{x^5-x^4-2x^3+4x^2-15x+3}{(x^2+1)^2(x^2+4)}dx$

4.10 إكمال المربع

مثـــال 17

احسب $\int \frac{dx}{x^2-4x+1}$.

الحـــل

$$x^2-4x+1 = x^2-4x+4-4+1 = (x-2)^2-3$$

لنفرض أن $u = x-2$ وبذلك فإن $du = dx$

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1} = \int \frac{dx}{(x-2)^2-3} = \int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^3}$$

باستخدام الكسور الجزئية

$$\frac{1}{u^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})} = \frac{A}{u-\sqrt{3}} + \frac{B}{u+\sqrt{3}}$$

$$A+B=0\ ,\ A-B=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\ B=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

إذن

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+1} = \int \frac{Adu}{u-\sqrt{3}} + \int \frac{Bdu}{u+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u-\sqrt{3}| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|u+\sqrt{3}| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right| + C$$

تمارين 4.10

احسب التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 2x - 3}$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 1}$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x}$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 6}$

5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}}$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

8) $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^4 + 4x^2 + 5}}{x^2 + 2}dx$

9) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^4 + 2x^2 + 2}$

10) $\displaystyle\int (x^2 - 6x)dx$

5.10 التكاملات المعتلة

لنفرض أن f دالة متصلة على الفترة $[a,-\infty)$.

نستطيع إيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ حيث أن b عدد أكبر من a، عندما يؤول b إلى ∞ وتكون النهاية

(1 $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$

موجودة، وعندها نسمي $\int_a^\infty f(x)dx$ التكامل المعتل، ونقول إن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب. إذا كانت النهاية في (1) غير موجودة، يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً. التكامل المعتل على الشكل $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ يعني:

(2 $\lim\limits_{a\to\infty} \int_{-\infty}^b f(x)dx$

ويكون متقارباً إذا كانت النهاية (2) موجودة، ومتباعداً إذا كانت النهاية (2) غير موجودة

مثال 18

احسب $\int_1^\infty e^{-x}dx$.

الحل

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[-e^{-x}]\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-1}) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}\right) + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e}$$

$$= 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$