جمهورية العراق
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الانبار – كلية العلوم
قسم الفيزياء

اسم المادة: الفيزياء العامة

المستوى الدراسي: الدراسات الاولية (البكالوريوس)

المرحلة: الاولى

المحاضرة رقم (2)

اسم المحاضرة: المتجهات Vectors

مدرس المادة

م. احمد مظفر احمد

المتجهات Vectors

1-2 الكميات القياسية والكميات المتجهة Scalars and vectors

الكميات الفيزيائية نوعان:

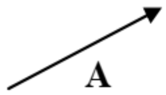
أ- **الكميات القياسية:** هي كميات فيزيائية غير متجهة يتم تعيينها تماماً إذا عرف مقدارها فقط.

ومن أمثلة الكميات القياسية: الكتلة، الزمن، الطول، درجة الحرارة والطاقة.

ب- **الكميات المتجهة:** هي كميات فيزيائية متجهة يتم تعيينها تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها.

يمكن تمييز الكمية المتجهة عن الكمية القياسية وذلك بكتابة المتجه بخط عريض **A** كما هو مستخدم في الكتب أو بوضع إشارة سهم أعلى الرمز A كما هو الحال في الكتابة اليدوية $\vec{A}$. أما الكمية القياسية أو ما يُعرف بقيمة المتجه **A** مثلا فيعبر عنه بالرمز A أو |**A**| أو $|\vec{A}|$.

ومن الأمثلة على الكميات المتجهة الإزاحة والسرعة والعجلة والقوة وكمية الحركة. وتستخدم عادةً الطرق الهندسية في تمثيل الكمية المتجهة حيث يمثَّل المتجه بيانياً بسهم يتناسب طوله طردياً مع مقدار المتجه واتجاهه يمثل اتجاه المتجه شكل (2-1) .

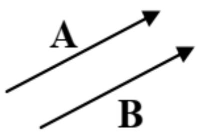


شكل (2-1) سهم يمثل المتجه

خواص المتجهات:

- **تساوي المتجهات:**

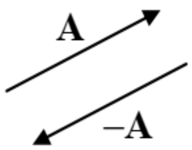
إن المتجهين **A** ، **B** متساويان إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه (ونفس الوحدة إن وجدت) ، أي أن **A** = **B** إذا كان مقدار **A** يساوي مقدار **B** وكان السهم الممثل للمتجه **A** يوازي السهم الممثل للمتجه **B** شكل (2-2) .



شكل (2-2) تساوي المتجهات

- **سالب المتجه:**

إذا أعطينا المتجه **A** فإن **A**– هو متجه مساوٍ له في المقدار ويعاكسه في الاتجاه شكل (2-3) .



شكل (2-3) سالب المتجه

- **جمع المتجهات:**

عند جمع المتجهات يجب أن تكون هذه المتجهات من نفس النوع فلا يمكن مثلا أن نجمع متجه قوة إلى متجه سرعة لاختلافهما في الأبعاد. وذلك ينطبق أيضا عند جمع الكميات القياسية.

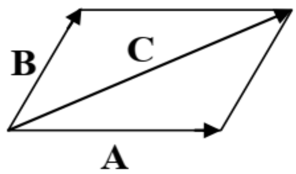
إيجاد محصلة مجموعة من المتجهات:

1- إذا كانت جميعها تعمل على خط واحد فإنها تجمع جبرياً بإشاراتها وذلك بعد اختيار اتجاهاً معيناً يكون موجباً . وإذا تساوى مقدار متجهين وتضادا اتجاهاً كان محصلتهما تساوي صفر.

2- إذا لم يكن خط تأثير المتجهات واحداً فإننا نوجد محصلتها بإحدى طريقتين:

أ- طريقة متوازي الأضلاع:

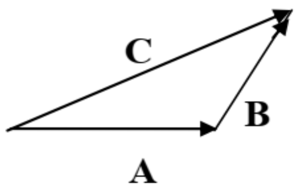
حاصل جمع المتجهين **A** و **B** هو متجه **C**، ويسمى عادةً بالمحصلة (Resultant). ولإجراء عملية الجمع نقوم برسم أحد المتجهين أولاً وليكن **A** بمقياس رسم مناسب ، ثم من بداية المتجه **A** نرسم المتجه **B** بنفس مقياس الرسم ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع فتكون المحصلة هي قطر متوازي الأضلاع الذي ضلعاه المتجاوران هما المتجهان **A** و**B**. كما هو موضح في الشكل (2-4).



شكل (2-4) محصلة متجهين بطريقة متوازي الأضلاع

ب- طريقة المثلث:

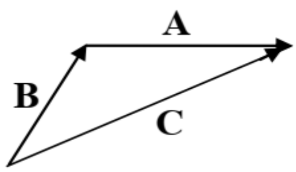
لإجراء عملية الجمع بطريقة المثلث نقوم برسم أحد المتجهين أولاً وليكن **A** بمقياس رسم مناسب، ثم من رأس المتجه **A** ننقل المتجه **B** فتكون المحصلة **C** هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه **A** وينتهي عند رأس المتجه **B** كما في الشكل (2-5) .



شكل (2-5) محصلة متجهين **A+B** بطريقة المثلث

ويمكن التعبير رياضياً عن عملية الجمع في كلتي الطريقتين بالمعادلة (2-1).

$$C = A + B \qquad (2\text{-}1)$$



شكل (2-6) محصلة متجهين **B+A** بطريقة المثلث

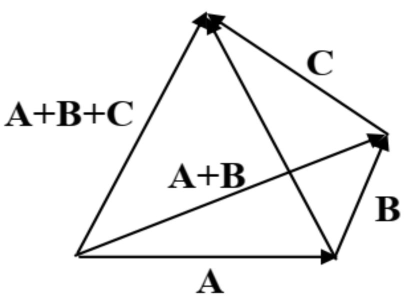
لنفرض أننا بدأنا عملية الجمع بأخذ المتجه **B** أولاً ثم جمعنا إليه المتجه **A** أي قمنا بعملية الجمع **B+A** يتضح من الشكل (2-6) أننا نحصل على نفس المتجه **C** وبذلك نستطيع أن نكتب :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad (2\text{-}2)$$

وتسمي هذه النتيجة **بقانون التبادل للجمع** .

يمكن تطبيق طريقة المثلث لجمع أكثر من متجهين، فمثلاً المتجهات الثلاث **A** و **B** و **C** يمكن جمعها كما هو مبين في الشكل (2-7).

ويمكن التعبير عن هذه النتيجة رياضياً بالمعادلة



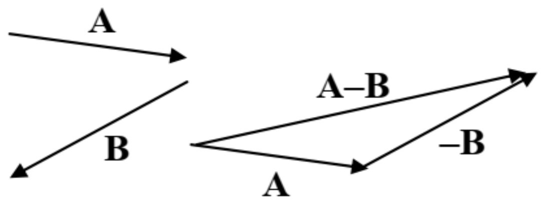
شكل (2-7) محصلة ثلاث متجهات بطريقة المثلث

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad (2\text{-}3)$$

وتسمى هذه المعادلة بقانون الترافق للجمع.

- **طرح المتجهات:**

إن عملية طرح المتجهات شبيهة بعملية جمع المتجهات، فمثلاً **B – A** هو متجه جديد **C** ولتحديد المتجه **C** نقوم برسم المتجه **A** أولاً ومن رأس هذا المتجه نرسم سهماً موازياً ومعاكساً في الاتجاه للمتجه **B**. إن هذا السهم يمثل المتجه **B**–، وبذلك تكون المحصلة **C** هي المتجه الذي يبدأ من بداية المتجه **A** وينتهي عند رأس المتجه **B**– شكل (2-9). تمثل هذه العملية رياضياً بالمعادلة (2-5).



شكل (2-9) طرح المتجهات

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \qquad (2\text{-}4)$$

- **ضرب المتجهات بكمية قياسية:**

يمكن ضرب المتجه بكمية قياسية فمثلاً **2A** تعني متجه جديد مقداره 2A واتجاهه هو نفس اتجاه **A**. وبصورة عامة فإن ضرب المتجه **A** بالكمية القياسية c يعطي المتجه **cA** و اتجاهه هو نفس اتجاه **A** إذا كانت الكمية القياسية c موجبة. وعكس اتجاه **A** إذا كانت الكمية القياسية c سالبة.

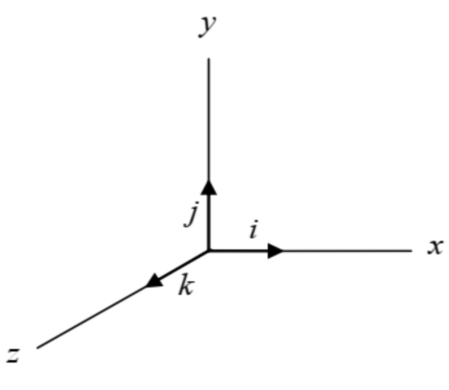
من الأمثلة الفيزيائية على ضرب المتجه بكمية قياسية الزخم الخطي (كمية التحرك الخطية) **P** وهو حاصل ضرب الكتلة m في متجه السرعة **v** ويعطي بالعلاقة (2-6).

$$\mathbf{P} = m\,\mathbf{v} \qquad (2\text{-}5)$$

2-2 متجهات الوحدة Unit vectors

متجه الوحدة هو متجه له اتجاه معين وقيمته هي الوحدة (Unity)، وليس له وحدة قياس أو بُعد.

يوجد ثلاث متجهات وحدة في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) هي $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{k}$ (يدويا تكتب $\hat{i}$، $\hat{j}$، $\hat{k}$) حيث أن هذه المتجهات تشير إلى الاتجاه الموجب للمحاور x و y و z على الترتيب كما هو موضح في الشكل (2-10) ، فمثلا إذا كان المتجه **A** يتجه باتجاه x الموجب وقيمته A و **B** يتجه باتجاه y الموجب وقيمته B و **C** باتجاه z الموجب وقيمته C فإن هذا المتجهات تكتب على الترتيب بالصورة الاتجاهية التالية :

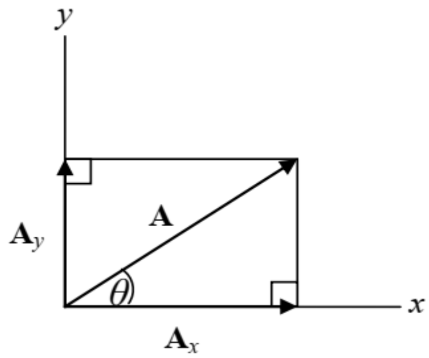


شكل (2-10) متجهات الوحدة $\boldsymbol{i}$ و$\boldsymbol{j}$ و$\boldsymbol{k}$ تتجه في الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة x وy وz على الترتيب

$$\mathbf{A} = A\,\boldsymbol{i}\,,\ \mathbf{B} = B\,\boldsymbol{j}\,,\ \mathbf{C} = C\,\boldsymbol{k}$$

ملاحظة : وجود الإشارة السالبة أمام أي متجه وحدة يدل على الاتجاه المعاكس فمثلا $-\boldsymbol{i}$ تشير إلى الاتجاه السالب لمحور x .

3-2 تحليل المتجهات Analysis of vectors



شكل (2-11) تحليل المتجه **A** إلى مركبتين متعامدتين

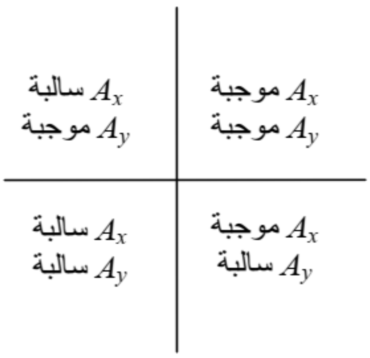
يمكن تحليل أي متجه **A** واقع في المستوى xy إلى متجهين متعامدين ، الأول موازي لمحور x $(\mathbf{A}_x)$ والآخر موازي لمحور y $(\mathbf{A}_y)$ وتكون محصلتهما هي نفس المتجه **A** :

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j}} \qquad (2\text{-}7)$$

فإذا كان المتجه **A** يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور x كما هو بالشكل (2-11) وأسقطنا من رأس المتجه **A** عمودين على المحورين x و y فإن الكميتين $\mathbf{A}_x$ و $\mathbf{A}_y$ هما مركبتا المتجه **A** ومن الشكل نجد أن :

$$\boxed{A_x = A\cos\theta\,,\ \ A_y = A\sin\theta} \qquad (2\text{-}8)$$

- إن المركبتين A_x و A_y أرقام يمكن أن تكون موجبه أو سالبه (أو صفر) و تسمى عملية إيجادهما بتحليل المتجه إلى مركباته .
- إن المركبتين A_x و A_y تشكلان ضلعين من مثلث قائم الزاوية بينما يشكل A وتر هذا المثلث و بتطبيق نظرية فيثاغورث نجد أن قيمة المتجه **A** تعطى كما في المعادلة (2-9) :



شكل (2-12) إشارة المركبات حسب الربع الذي يقع فيه المتجه

$$\mathrm{A}^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2$$

$$\boxed{\mathrm{A} = \sqrt{A_{\mathrm{x}}^2 + \mathrm{A}_{\mathrm{y}}^2}} \qquad (2\text{-}9)$$

ومن الشكل (2-11) نجد أن

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad (2\text{-}10)$$

وعند حلها لإيجاد قيمة θ فإننا نكتب

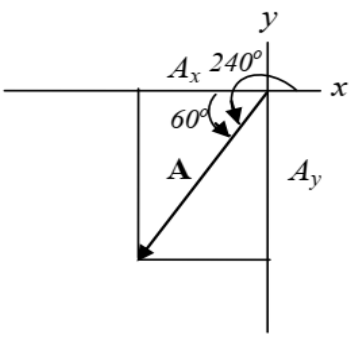
$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{A_y}{A_x}} \qquad (2\text{-}11)$$

المعادلة (2-11) تقرأ θ تساوي الزاوية التي ظلها $\frac{A_y}{A_x}$ ، وتعتبر قيمه θ المسئولة عن تحديد إشارات المركبات A_y و A_x لأن الزاوية θ تحدد الربع الذي يقع فيه المتجه **A** . الشكل (2-12) يلخص إشارات المركبات في كل ربع.

مثال (2-1)

احسب المركبتين السينية والصادية للمتجهات التالية:

أ- متجه **A** قيمته 6 وحدات ويصنع زاوية مقدارها 240^o مع الاتجاه الموجب لمحور x



الحل:

$$A_x = A \cos 240 = 6 \times (-1/2) = -3$$

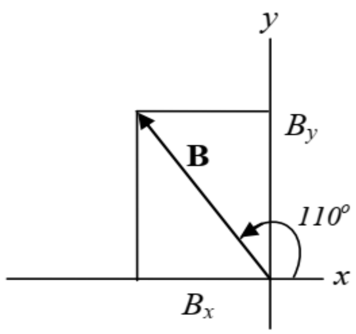
$$A_y = A \sin 240 = 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5.2$$

حل آخر:

$$A_x = -A \cos 60 = -6 \times (1/2) = -3$$

$$A_y = -A \sin (60) = -5.2 = -6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب- متجه **B** قيمته 5 وحدات و يصنع زاوية مقدارها 110^0 مع الاتجاه الموجب لمحور x



الحل:

$$B_x = B \cos 110 = -1.7$$

$$By = B \sin 110 = 4.7$$

4-2 محصلة المتجهات Resultant of vectors

تستخدم طريقه تحليل المتجهات لإيجاد محصلة مجموعة منها فإذا فرضنا مثلاً ثلاثة متجهات **A** و **B** و **C** في مستوى واحد و تصنع الزوايا θ_1 ، θ_2 ، θ_3 مع الاتجاه السيني على الترتيب فإن مركبات هذه المتجهات في الاتجاه السيني هي:

$$A_x = A\cos\theta_1 \quad , \quad B_x = B\cos\theta_2 \quad , \quad C_x = C\cos\theta_3$$

وتكون محصله هذه المركبات في الاتجاه السيني هي:

$$R_x = A_x + B_x + C_x = A\cos\theta_1 + B\cos\theta_2 + C\cos\theta_3$$

بالمثل بالنسبة للمركبات العمودية في الاتجاه الصادي تكون محصلتها

$$R_y = A_y + B_y + C_y = A\sin\theta_1 + B\sin\theta_2 + C\sin\theta_3$$

قيمة محصلة مجموعة المتجهات تكون هي نفسها محصله المركبات السينية و الصادية و تعطي بالمعادلة

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}} \qquad (2\text{-}12)$$

ويمكن إيجاد اتجاه المحصلة أي الزاوية θ التي تصنعها مع المحور السيني من المعادلة

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}} \qquad (2\text{-}13)$$

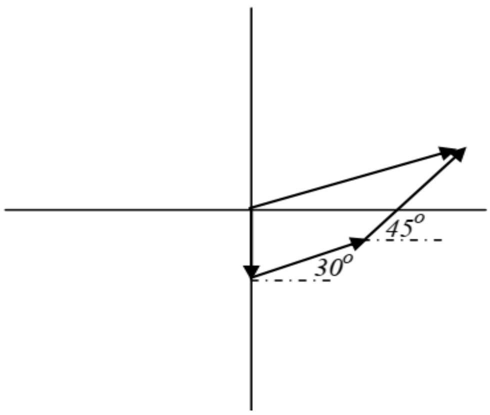
ويمكن كتابة محصلة مجموعة من المتجهات بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_x + B_x + C_x)\,\boldsymbol{i} + (A_y + B_y + C_y)\,\boldsymbol{j} + (A_z + B_z + C_z)\,\boldsymbol{k}} \qquad (2\text{-}14)$$

مثال (2-2)

يخرج سائح من مدينة صنعاء فيقطع مسافة *10 km* باتجاه الجنوب ، ثم يسير مسافة *15 km* باتجاه يصنع 30^o شمال شرق ثم يقطع مسافة *20 km* باتجاه الشمال الشرقي. ما هو موضع السائح بالنسبة لمدينة غزة ؟

الحل:



شكل (2-13) مثال (1)

إن المسافات التي يقطعها السائح هي متجهات إزاحة لكل منها مقدار و اتجاه، فالمسألة هي جمع متجهات.
الرسم يوضح الحالات المتعاقبة لسير السائح و يوضح موقعه الحالي من مدينة صنعاء والتي تمثل نقطة الأصل، ولإيجاد قيمة واتجاه المحصلة (الموضع بالنسبة لمدينة غزة) نعمل على تحليل الإزاحات الثلاثة في الاتجاهين السيني والصادي ثم نحسب المحصلة مقدارا واتجاها.

$$R_x = 0 + 15 \cos 30 + 20 \cos 45 = 15 \times 0.866 + 20 \times 0.707 = 27.13\ Km$$

$$R_y = -10 + 15 \sin 30 + 20 \sin 45 = -10 + 15 \times 0.5 + 20 \times 0.707 = 11.64\ Km$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(27.13)^2 + (11.64)^2} = \sqrt{736 + 135.5} = \sqrt{871.5} = 29.5 Km$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{11.64}{27.13} = \tan^{-1} 0.429$$

$$\theta = 23.2^{O}$$

ملاحظة/ يمكن كتابة المحصلة بصورتها الاتجاهية كما يلي:

$$\mathbf{R} = R_x\, \boldsymbol{i} + R_y\, \boldsymbol{j} = 27.13\, \boldsymbol{i} + 11.64\, \boldsymbol{j}$$

مثال (2-2)

Two vectors are given by $\vec{A} = 3i - 2j$ and $\vec{B} = -i - 4j$. Calculate (a) $\vec{A} + \vec{B}$, (b) $\vec{A} - \vec{B}$, (c) $|\vec{A} + \vec{B}|$, (d) $|\vec{A} - \vec{B}|$, and (e) the direction of $\vec{A} + \vec{B}$ and $|\vec{A} - \vec{B}|$.

الحل

(a) $\vec{A} + \vec{B} = (3i - 2j) + (-i - 4j) = 2i - 6j$

(b) $\vec{A} - \vec{B} = (3i - 2j) - (-i - 4j) = 4i + 2j$

(c) $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 6.32$

(d) $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$

(e) For $\vec{A} + \vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(-6/2) = -71.6^{o} = 288^{o}$

For $\vec{A} - \vec{B}$, $\theta = \tan^{-1}(2/4) = 26.6^{o}$

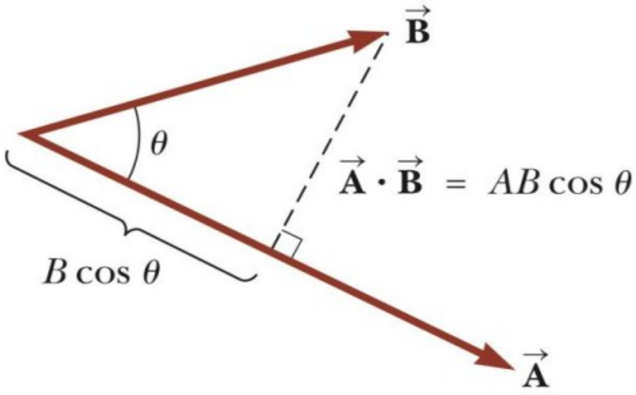
5-2 ضرب المتجهات Product of vectors

يوجد نوعين من الضرب للمتجهات النوع الأول يسمى الضرب القياسي لان حاصل ضرب متجهين يعطي كمية قياسية مثل حاصل ضرب متجه القوة في متجهة الإزاحة يكون الناتج الشغل وهو كمية قياسية، والنوع الثاني هو

الضرب الاتجاهي وذلك لان حاصل ضرب متجهين ينتج عنه متجه ثالث يكون اتجاهه عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين الآخرين مثل متجه سرعة جسم مشحون في متجه المجال المغناطيسي ينتج عنه متجه قوة مغناطيسية.

الضرب القياسي The scalar product

يعرف الضرب القياسي scalar product بالضرب النقطي dot product وتكون نتيجة الضرب القياسي لمتجهين كمية قياسية. ويعرف الضرب القياسي لمتجهين بحاصل ضرب مقدار المتجه الأول في مقدار المتجه الثاني في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما.



$$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta \qquad (2\text{-}15)$$

يمكن إيجاد قيمة الضرب القياسي لمتجهين باستخدام مركبات كل متجه كما يلي:

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{A.B} = (A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k})\,.\,(B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}.\vec{B} = (&A_x i.B_x i + A_x i.B_y j + A_x i.B_z k\\ &+ A_y j.B_x i + A_y j.B_y j + A_y j.B_z k\\ &+ A_z k.B_x i + A_z k.B_y j + A_z k.B_z k)\end{aligned}$$

Therefore

$$\therefore \vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

The angle between the two vectors is

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{|A||B|}$$

مسائل على الفصل الثاني

1- سيارة تتحرك $5km$ باتجاه الجنوب بعد ذلك $2km$ باتجاه الغرب. أوجد محصله الإزاحة (مقداراً و اتجاها).

2- سيارة تقطع مسافة $20km$ شمالاً و بعد ذلك تقطع مسافة $35km$ باتجاه $60°$ غرب الشمال . أوجد مقدار و اتجاه محصله الإزاحة .

3- إذا كان **A** يمثل إزاحة مقدارها $3m$ باتجاه يصنع $30°$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني و كانت $\boldsymbol{B}$ تمثل إزاحة مقدارها $3m$ بالاتجاه الموجب للمحور الصادي. أوجد بيانياً ما يلي

ا) **A + B**　　ب) **A - B**　　ج) **B - A**　　د) **3A - B**

4- المتجه **A** يصنع زاوية مقدارها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أوجد مركبات **A** قي الحالات التالية:

ا) $\theta = 60°$, $A = 8m$

ب) $\theta = 120°$, $A = 6m$

ج) $\theta = 225°$, $A = 12m$

5- أوجد محصلة القوى الآتية التي تؤثر في نقطه على جسم علماً بأنها مقدره بالنيوتن :

150 بزاوية $20°$ ، 100 بزاوية $120°$ ، 80 بزاوية $170°$ ، 120 بزاوية $240°$ و جميع الزوايا مقاسه بالنسبة للاتجاه الموجب لمحور السينات.

References:

1- Physics for Scientists and Engineers (with PhysicsNOW and InfoTrac), Raymond A. Serway - Emeritus, James Madison University , Thomson Brooks/Cole © 2004, 6th Edition, 1296 pages.

2- مبادئ الفيزياء العامة، د. عقيل مهدي كاظم، الطبعة الأولى، 2009

3- محاضرات فيزياء عامة، الدكتور عبدالحي صلاح، جامعة الملك سعود

http://faculty.ksu.edu.sa/AbdelhaySalah/Arabic/Documents/Forms/AllItems.aspx

4- محاضرات فيزياء عامة 102 للدكتور محمد مرسي،

http://faculty.ksu.edu.sa/elmorsy/Pages/102physics.aspx