كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : الدوال المركبة

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex Functions

اسم الحاضرة الأولى باللغة العربية: الاعداد المركبة

اسم المحاضرة الأولى باللغة الإنكليزية : Complex Numbers

Lecture 1

Complex Numbers

تسمى المجموعة $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ بمجموعة الاعداد العقدية. لذلك يمكن تعريف الاعداد المعقدة z بأنها ازواج مرتبة $z = (x, y)$ حيث x, y اعداد حقيقية. يسمى x بالجزء الحقيقي للعدد المركب z اما y فيسمى بالجزء الخيالي للعدد المركب z وتكتب بشكل التالي

$$x = Rez \quad , \quad y = Imz$$

يمكن كتابة العدد المركب $z = (x, y)$ بالصورة $z = x + iy\,,\ \ i = \sqrt{-1}$

بمعرفة الاعداد المركبة يصبح بالإمكان ايجاد الحلول لمعادلات الدرجة الثانية ذات المقدار المميز السالب اي ان: $b^2 - 4ac < 0$.

Ex: $z^2 - 4z + 29 = 0$ اوجد حلول المعادلة

Solution:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad a = 1, \quad b = -4, \quad c = 29$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(29)}}{2(1)}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 116}}{2}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2}$$

$$z = \frac{4 \pm 10i}{2}$$

$$z_1 = \frac{4+10i}{2} = \frac{2(2+5i)}{2} = 2+5i$$

$$z_2 = \frac{4-10i}{2} = \frac{2(2-5i)}{2} = 2-5i.$$

Algebra of Complex Numbers

١- يكون العددان المركبان $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$

متساويين اذا وفقط اذا كان لها نفس الجزئيين الحقيقين ونفس الجزئيين الخياليين اي ان :

$$z_1 = z_2 \Longrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ if and only if } x_1 = x_2 \text{ and } y_1 = y_2.$$

٢- تعرف عمليتا الجمع $z_1 + z_2$ والضرب $z_1 . z_2$ للعددين المعقدين

$$z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$$

بالمعادلتين

1- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

2- $z_1 . z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2)$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

ويمكن التعبير عن عملتي الجمع والضرب للعددين المعقدين بالشكل التالي:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

يمكن تعميم عملية الضرب الاعداد المركبة لأكثر من عددين مركبين كما يلي:

$$z^2 = zz, \quad z^3 = z^2z, \quad \ldots$$

H.W.

1- $(4-2i)+(-6+5i)=?$

2- $(-7+3i)+(2-4i)=?$

3- $(3-2i)(1+3i)=?$

4- $(5+i)(-2+3i)=?$

Algebraic Properties الخواص الجبرية

اذا كانت z_1 , z_2 , z_3 اعداد مركبة فأن :

١ ـ قانون الابدال :

* $z_1+z_2=z_2+z_1$
* $z_1.z_2=z_2.z_1$

٢ ـ قانون التجميع :

* $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$
* $z_1.(z_2.z_3)=(z_1.z_2).z_3$

٣ ـ قانون التوزيع :

* $z_1.(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

$0=(0,0)$ هو المحايد بالنسبة لعملية الجمع

$1=(1,0)$ هو المحايد بالنسبة لعملية الضرب

وذلك لان:

* $z+0=(x,y)+(0,0)$

$=(x+0,y+0)$

$$= (x, y) = z$$

كذلك

* $z.1 = (x, y).(1,0)$

$$= (x.1 - y.0, y.1 + x.0)$$

$$= (x, y) = z$$

- لكل عدد مركب $z = (x, y)$ يوجد نظير جمعي $-z = (-x, -y)$ يحقق المعادلة $z + (-z) = 0$ والنظير الجمعي يكون وحيد.
- وكذلك لأي عدد مركب غير صفري $z = (x, y)$ يوجد نظير ضربي z^{-1} بحيث ان

$$z.z^{-1} = 1, \quad z \neq 0$$

ولإيجاد النظير الضربي للعدد المركب الغير صفري $z = (x, y)$ نفرض ان $z^{-1} = (u, v)$ ونعمل على ايجاد العددين الحقيقيين v, u بدلالة y, x بحيث ان

$$z.z^{-1} = (x, y).(u, v) = 1 = (1,0)$$

$$\Longrightarrow (x, y).(u, v) = (1,0)$$

$$\Longrightarrow (xu - yv, yu + xv) = (1,0)$$

$$\Longrightarrow xu - yv = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$yu + xv = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$\Longrightarrow x^2u - yxv = x$$

$$y^2u + yxv = 0$$

$$\Longrightarrow x^2u + y^2u = x$$

$$\Longrightarrow u(x^2 + y^2) = x$$

$$\Rightarrow u = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \dots (3)$$

Now

$$\Rightarrow yxu - y^2 v = y$$

$$\pm yxu \pm x^2 v = 0$$

$$\Rightarrow -(x^2 + y^2)v = y$$

$$\Rightarrow v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad \dots (4)$$

$$z^{-1} = (u, v) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$$

لذلك يكون النظير الضربي للعدد المركب الغير صفري $z = (x, y)$ هو

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \quad or \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}\right), z \neq 0.$$

- لأي عددين مركبين z_1, z_2 اذا كان $z_1 . z_2 = 0$ فأن $z_1 = 0$ او $z_2 = 0$ اي ان

If $z_1 . z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 0 \quad or \quad z_2 = 0$

Suppose $z_1 . z_2 = 0$ and $z_1 \neq 0$

$$z_2 = z_2 . 1 = z_2(z_1 z_1^{-1})$$

$$= (z_2 z_1) z_1^{-1}$$

$$= (z_1 z_2) z_1^{-1}$$

$$= 0 z_1^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_2 = 0$$

- **عملية القسم على الاعداد المركبة** : ليكن z_2, z_1 عددين مركبين بحيث ان $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \ , \ \ z_2 \neq 0$$

if $z_1 = x_1 + iy_1 \ , \ \ z_2 = x_2 + iy_2 \ , \ \ z_2 \neq 0$

then

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1) \ (x_2 + iy_2)^{-1}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1 + iy_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + \ y_2^2} - i \frac{y_2}{x_2^2 + \ y_2^2} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2}{x_2^2 + \ y_2^2} + \frac{y_1 y_2}{x_2^2 + \ y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2}{x_2^2 + \ y_2^2} - \frac{x_1 y_2}{x_2^2 + \ y_2^2} \right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + \ y_2^2} \right) + i \left(\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + \ y_2^2} \right)$$

ملاحظة: لأي عددين مركبين $z_1 = x_1 + iy_1 \ , \ z_2 = x_2 + iy_2$ يكون

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- مما سبق يمكن استخراج ما يلي:

* $\frac{1}{z_1 z_1} = \frac{1}{z_1} . \frac{1}{z_2} \ , \quad z_1 \neq 0, \ z_2 \neq 0, \ z_1 z_2 \neq 0$

* $\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \ , \quad z_3 \neq 0$

* $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3} \right) \left(\frac{z_2}{z_4} \right) \ , \quad z_3 \neq 0, \ z_4 \neq 0, \ z_3 z_4 \neq 0$

Examples: اوجد ناتج ما يلي:

1. $\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right)$

الطريقة الاولى:

$$= \frac{1}{(2+3)+i(-3+2)} = \frac{1}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i}$$ ← نضرب في مرافق العدد

$$= \frac{5+i}{25+1} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + i\frac{1}{26}$$

الطريقة الثانية:

$$\left(\frac{1}{2-3i}\right)\left(\frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{(2+3)+i(-3+2)} = \frac{1}{5-i}$$

$$= 1.(5-i)^{-1} = \frac{5+i}{25+1} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + i\frac{1}{26}$$

2. $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$

$$= \left(\frac{1+2i}{3-4i}\right)\left(\frac{3+4i}{3+4i}\right) + \left(\frac{2-i}{5i}\right)\left(\frac{-5i}{-5i}\right)$$

$$= \frac{(3-8)+i(6+4)}{9+16} + \frac{-5-10i}{25}$$

$$= \frac{-5+10i-5-10i}{25}$$

$$= \frac{-10}{25} = -\frac{2}{5} + 0i$$

H.W.

1- : اوجد ناتج ما يلي

a- $(3 + 2i) + (-7 - i) = ?$

b- $(-7 - i) + (3 + 4i) = ?$

c- $(5 + 3i) + [(-1 + 2i) + (7 - 5i)] = ?$

d- $(2 - 3i)(-2 + i) = ?$

e- $(2 - i)[(-3 + 2i)(5 - 4i)] = ?$

2- اثبت ان كلا من العددين $z = 1 \pm i$ يحقق المعادلة $z^2 - 2z + 2 = 0$

3- اثبت ما يلي:

a- $Re(iz) = -Im(z)$

b- $Im(iz) = Re(z)$

4- اوجد النظير الضربي لما يلي ثم تحقق من صحة الاجابة

a- $(5 + i)$

b- $(6 - 3i)$

c- $(2 - 10i)$

5- اذا كان $(a^2 - 1) + 2i = 3 + (b^2 - b)i$ اوجد قيمة الثوابت a , b