كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : الدوال المركبة

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex Functions

اسم الحاضرة الثانية باللغة العربية: القيمة المطلقة

اسم المحاضرة الثانية باللغة الإنكليزية : Absolute Value

Lecture 2

Absolute Value القيمة المطلقة

تعرف القيمة المطلقة للعدد المركب $z = x + iy$ بأنها العدد الحقيقي الغير السالب $\sqrt{x^2 + y^2}$ ويرمز لها بالرمز $|z|$ اي ان $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

البعد بين العددين المركبين $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ هو

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

نلاحظ ان

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\Longrightarrow |z|^2 = x^2 + y^2$$
$$\Longrightarrow |z|^2 = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2$$

وكذلك

$$\mathrm{Re}z \leq |\mathrm{Re}z| \leq |z|$$
$$\mathrm{Im}z \leq |\mathrm{Im}z| \leq |z|$$

Properties of Absolute Value

يمكن ان نذكر بعض الخواص المتنوعة للقيمة المطلقة ومنها:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4. $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

5. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Complex Number Conjugate مرافق العدد المركب

المرافق للعدد المركب $z = x + iy$ يعرف بأنه العدد المركب $x - iy$ ويرمز له بالرمز $\bar{z}$ اي ان

$$\bar{z} = x - iy$$

نلاحظ ان

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{z}|$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

Properties of Complex Number Conjugate

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $|z|^2 = z\bar{z}$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
4. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
5. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \qquad z_2 \neq 0$
7. $\bar{z} = z$ if and only if z is real
8. $\bar{z} = -z$ if and only if z is pure imaginary
9. $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

10. $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

Solution

3. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$$

$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

9. $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy)$

$$= x + iy + x - iy$$

$$= 2x = 2\mathrm{Re}(z)$$

10. $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy)$

$$= x + iy - x + iy$$

$$= 2iy = 2i\mathrm{Im}(z)$$

Geometric representing of Complex numbers التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

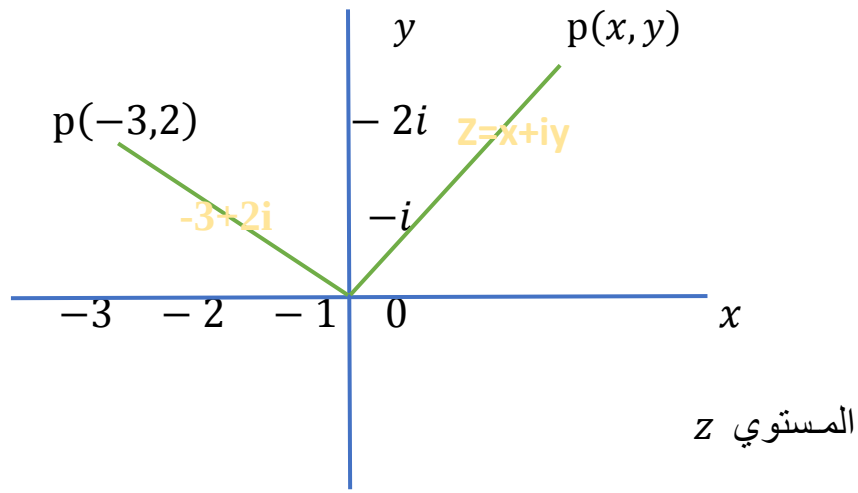
ان كل عدد مركب $z = x + iy$ يقابل نقطة احداثيتها (x, y) في المستوي xy وبالعكس اي ان كل نقطة في المستوي xy تقابل عددا مركبا واحدا

وكل عدد مركب z يمكن تمثيله بمتجه $(vector)$ مبدؤه نقطة الاصل ونهايته النقطة التي تقابل ذلك العدد

يسمى المحور x بالمحور الحقيقي والمحور y بالمحور الخيالي والمستوي xy يسمى بمستوي الاعداد المعقدة او المستوي z

Example:

العدد المعقد $-3+2i$ يقابل النقطة $P(-3,2)$ كما في الشكل



كيفية تمثيل النقاط في المستوي المركب

١- الاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها r تحقق المعادلة $|z| = r$ حيث r عدد حقيقي موجب اي ان $x^2 + y^2 = r^2$

٢- الاعداد المعقدة التي تقابل نقاط واقعة على محيط دائرة مركزها النقطة $z_0 = x_0 + iy_0$ ونصف قطرها عدد حقيقي موجب r تحقق المعادلة $|z - z_0| = r$ اي ان

$$|z - z_0| = r$$

$$\Rightarrow \left|(x + iy) - \left(x_0 + iy_0\right)\right| = r$$

$$\Rightarrow \left|(x - x_0) + i\left(y - y_0\right)\right| = r$$

$$\Rightarrow (x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = r^2$$

معادلة دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها r

٣- النقاط التي تحقق المتباينة $|z - z_0| \leq r$ تقع داخل وعلى محيط الدائرة التي مركزها z_0 ونصف قطرها r

Ex: $|z - 1 + i| = 1$ *ناقش هندسيا وجبريا المعادلة*

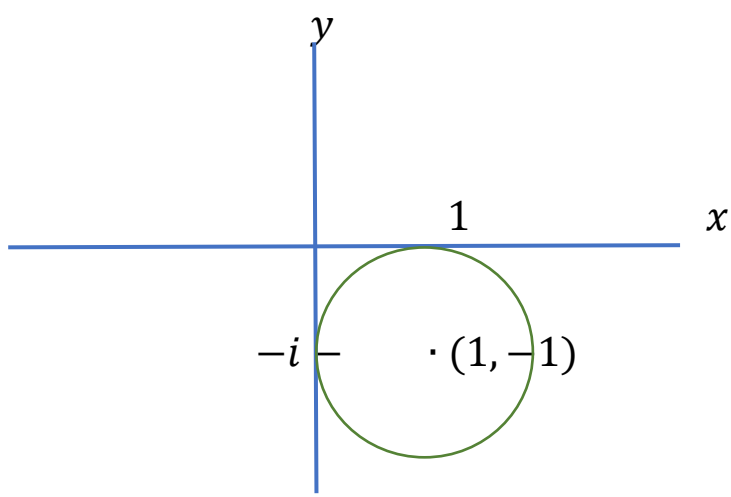
Solution:

$$|(x + iy) - 1 + i| = 1$$

$$\Longrightarrow |(x - 1) + i(y + 1)| = 1$$

$$\Longrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

تمثل النقاط الواقعة على محيط الدائرة التي مركزها النقطة $c(1, -1)$ ونصف قطرها $r = 1$



المستوي z

H.W. مثل جبريا وهندسيا ما يأتي:

1. $|z| \leq 2$
2. $|z + 1 + i| \leq 2$

3. $2 \leq |z| \leq 3$
4. $|z + 2i| \geq 1$
5. $Re(z + 2) = -1$
6. $|z - 5| = 6$
7. $Im(z + 2) = 3$

تمارين متنوعة

1- برهن قانون الابدال بالنسبة لعملية الضرب اي ان $z_1 z_2 = z_2 z_1$

وذلك بفرض $z_1 = (x_1, y_1),\ \ z_2 = (x_2, y_2)$

2- برهن ان

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

وذلك بفرض $z_1 = (x_1, y_1),\ \ z_2 = (x_2, y_2)\ , z_3 = (x_3, y_3)$

3- حل المعادلة $z^2 + z + 1 = 0$

بكتابة $0 = (0,0),\ \ 1 = (1,0),\ \ z = (x, y)$

4- اثبت ما يلي:

a. $\dfrac{5i}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} = \dfrac{-1}{2}$

b. $(1 - i)^4 = -4$

c. $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$

$d.\ \overline{iz} = -i\bar{z}$

$e.\ \dfrac{\overline{(2+i)^2}}{3-4i} = 1$

$f.\ \left|(2\bar{z}+5)\left(\sqrt{2}-i\right)\right| = \sqrt{3}|2z+5|$

5- في كل حالة ارسم مجموعة النقاط المعينة بالشروط المعطاة

$a.\ |z-1+i| = 1$

$b.\ |z+i| \leq 3$

$c.\ Re(\bar{z}-i) = 2$

$d.\ |z-1| = |z+i|$

$e.\ |2\bar{z}+i| = 4$

6- Prove that z is real if and only if $\bar{z} = z$

7. $x^2 - y^2 = 1$ اثبت ان القطع الزائد $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}, y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ باستخدام المعادلتين

يكتب بالشكل $z^2 + (\bar{z})^2 = 2$

8- ناقش هندسيا وجبريا ما يأتي

$|z+4i| = 10$