كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : الدوال المركبة

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex Functions

اسم الحاضرة الثالثة باللغة العربية: الاحداثيات القطبية

اسم المحاضرة الثالثة باللغة الإنكليزية : Polar Coordinates

Lecture 3

Polar Coordinates الاحداثيات القطبية

لتكن θ, r الاحداثيين القطبيين للنقطة (x, y) التي تقابل العدد المعقد غير صفري $z = x + iy$

$\therefore \quad x = r\cos\theta \quad \text{and} \quad y = r\sin\theta$

$\therefore \quad z = x + iy$

$\therefore \quad z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta$

$\therefore \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ الصيغة القطبية

العدد r هو طول المتجه الذي يمثل z اي ان $|z| = r$

العدد θ يسمى زاوية العدد المعقد z وتكتب $\theta = \arg(z)$

الزاوية θ هي الزاوية التي يصنعها المتجه z مع المحور الحقيقي الموجب باتجاه عكس عقرب الساعة وبذلك ستكون $(-\theta)$ باتجاه عقرب الساعة، لذلك فان لكل θ عدد غير منته من القيم الحقيقية وتختلف عن بعضها بمضاعفات 2π ويمكن تحديد هذه القيم من المعادلة $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ويجب تحديد الربع الحاوي على النقطة التي تقابل العدد

Example: Write in Polar form:

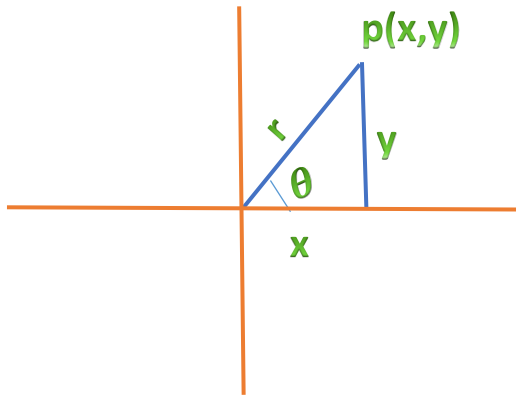
1. $1 + i$

$z = 1 + i$

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\therefore \quad r = \sqrt{2}$



$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1}$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. $z = -1 - i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}(1) + \pi$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \quad z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Principal Value القيمة الاساسية

لأي عدد معقد غير صفري معلوم z يرمز للقيمة الاساسية $arg(z)$ بـ $Arg(z)$ وتعرف بانها القيمة الوحيدة لـ $arg(z)$ بحيث ان $-\pi < Arg(z) \leq \pi$ لذلك يكون

$$arg(z) = Arg(z) + 2n\pi \ \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

في المثال السابق

$$Arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \ \ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$if\ n = 0 \implies arg(1+i) = \frac{\pi}{4} = Arg(1+i)$$

$$if\ n = 1 \implies arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$$

$$if\ n = -1 \implies arg(1+i) = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{-7\pi}{4}$$

وهكذا لجميع قيم n الصحيحة

لذلك يكون لـ $arg(1+i)$ عدد غير منتهي من القيم الحقيقية والتي تختلف عن بعضها بمضاعفات صحيحة لـ 2π اي ان

$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) \implies$ القيمة الاساسية

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{9\pi}{4} + i\,sin\frac{9\pi}{4}\right)$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{-7\pi}{4} + i\,sin\frac{-7\pi}{4}\right)$$

. .
. .
. .
. .

$\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$	$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
$\theta = \pi + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	$\theta = 2\pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وهكذا .....

Example: find $Arg(z)$, $arg(z)$ of the following

1. $z = 1 - \sqrt{3}i$

العدد في الربع الرابع

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \implies \theta = 2\pi - \tan^{-1}(\sqrt{3})$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{3} \qquad \leftarrow \; arg(z)$$ احدى قيم

$Arg(z)$ ولايجاد

$$arg(z) = Arg(z) + 2n\pi$$

$$\frac{5\pi}{3} = Arg(z) + 2\pi \quad , n = 1$$

$$Arg(z) = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{5\pi - 6\pi}{3}$$

$$Arg(z) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \quad arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

2. $z = -1 - i$

العدد في الربع الثالث

$$\tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \pi + \tan^{-1}(1)$$

$$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} \qquad \leftarrow \; arg(z)$$ احدى قيم

$Arg(z)$ ولايجاد

$$arg(z) = Arg(z) + 2n\pi$$

$$\frac{5\pi}{4} = Arg(z) + 2\pi \quad , n = 1$$

$$Arg(z) = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = \frac{5\pi - 6\pi}{4}$$

$$Arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \quad arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ملاحظة: اذا كان $z = 0$ فانه لا يمكن تطبيق المعادلة $\tan\theta = \frac{y}{x}$

If $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *and* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Then

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

2. $|z_1 z_2| = r_1 r_2$

3. $arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$

$$= arg(z_1) + arg(z_2)$$

- *وهذه النتيجة ليست دائما صحيحة عندما يحل* Arg *محل* arg

4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

5. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2$

$$= arg(z_1) - arg(z_2)$$

Euler's formula صيغة اويلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

If $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ *and* $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

Then

1. $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

3. $z_1^{-1} = \frac{1}{r_1} e^{-i\theta_1}$ النظير الضربي للعدد z_1

Examples: Find the Principal argument of the following Complex unmbers:

1. $z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$

$$arg(z) = arg(-2) - arg\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

$$\Rightarrow arg(-2) = \pi$$

$$\Longrightarrow arg\left(1+\sqrt{3}i\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$arg(z)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi-\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\in(-\pi,\pi]$$

$$\therefore \quad Arg\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right)=\frac{2\pi}{3}$$

2. $z=\dfrac{i}{-2-2i}$

$$arg(z)=arg(i)-arg(-2-2i)$$

$$\Longrightarrow arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow arg(-2-2i)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$$

$$arg\left(\frac{i}{-2-2i}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}=\frac{2\pi-5\pi}{4}=\frac{-3\pi}{4}\in(-\pi,\pi]$$

$$\therefore \quad Arg\left(\frac{i}{-2-2i}\right)=\frac{-3\pi}{4}$$

3. $z=\dfrac{5i}{1+i}$

$$arg(z)=arg(5i)-arg(1+i)$$

$$\Longrightarrow arg(5i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$$

$$arg(z) = arg\left(\frac{5i}{1+i}\right) = arg(5i) - arg(1+i)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi - \pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in (-\pi, \pi]$$

$$\therefore \quad Arg\left(\frac{5i}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4}$$

4. $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$

$$arg(z) = arg\left(\sqrt{3} - i\right)^6 = 6arg\left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$\Longrightarrow arg\left(\sqrt{3} - i\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow arg(z) = 6arg\left(\sqrt{3} - i\right) = 6\left(\frac{-\pi}{6}\right) = -\pi$$

$$\therefore \quad Arg(z) = -\pi$$

ملاحظة: ذكرنا سابقا ان الخاصية $arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$ ليست صحيحة دائما عندما يحل $Arg(z)$ محل $arg(z)$

ومثال على ذلك نناقش الخاصية عندما تكون $z_1 = -1 \quad and \quad z_2 = i$

$$Arg(-1) = \pi \qquad and \qquad Arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$Arg(-1) + Arg(i) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$Arg(z_1 z_2) = Arg(-1.i)$$

$$= Arg(-i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$Arg(z_1 z_2) = \frac{-\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2} = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$