كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : الدوال المركبة

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Complex Functions

اسم الحاضرة الخامسة باللغة العربية: الدوال التحليلية

اسم المحاضرة الخامسة باللغة الإنكليزية : Analytic Functions

Lecture 5

Analytic Functions الدوال التحليلية

I. Functions of a Complex Variable الدوال بمتغير معقد

لتكن S مجموعة الاعداد المعقدة. الدالة f المعرفة على S هي قاعدة تعني لكل z في S عددا معقدا w يدعى العدد w قيمة f عند z ويرمز له بالرمز $f(z)$ اي ان $w = f(z)$

تسمى المجموعة S منطلق f (domain of f)

نفرض ان $w = u + iv$ هي قيمة الدالة f عند $z = x + iy$ اي ان

$$w = f(z) \Longrightarrow u + iv = f(x + iy)$$

كل من العددين الحقيقين v, u يعتمد على المتغيرين y, x

Example: $f(z) = z^2$

Solution:

$$w = f(z) = (x + iy)^2$$

$$w = f(z) = (x + iy)(x + iy)$$

$$w = f(z) = (x^2 - y^2) + i(xy + yx)$$

$$w = f(z) = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$\therefore \quad u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad and \qquad \therefore \; v(x, y) = 2xy$$

هذا يعني ان f يمكن التعبير عنها بدلالة زوج من الدوال الحقيقية بمتغيرين حقيقين y, x اي ان

$$f(z) =\therefore \quad u(x,y) + iv(x,y)$$

II. Limits الغايات (او النهايات)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad if\ and\ only\ if$$

$$\forall \in > 0, \exists \delta > 0 \quad such\ that \quad |f(z) - w_0| < \in \ \ whenever\ 0 < |z - z_0| < \delta$$

Example: $Show\ that \quad \lim_{z\to 1} \frac{i\bar{z}}{2} = \frac{i}{2}$

Solution:

$$f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}\ , \quad w_0 = \frac{i}{2}\ , \quad z_0 = 1$$

$$\forall \in > 0, \quad we\ must\ find \quad \delta > 0 \quad such\ that$$

$$\left|\frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2}\right| < \in \ \ whenever\ 0 < |z - 1| < \delta$$

$$|f(z) - w_0| = \left|\frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{i\bar{z} - i}{2}\right|$$

$$= \frac{|i(\bar{z} - 1)|}{|2|}$$

$$= \frac{|i||\bar{z} - 1|}{2}$$

$$= \frac{|\overline{z - 1}|}{2}$$

$$= \frac{|z-1|}{2} < \in$$

$$\Longrightarrow \quad |z-1| < 2 \in$$

Take $\delta = 2 \in$ So we have

$$\forall \in > 0, \exists \delta > 0 : \quad \left|\frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2}\right| < \in \ \ whenever\ 0 < |z-1| < 2 \in$$

Example: $Show\ that \quad \lim_{z \to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = 2$

Solution:

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z-1} \ , \quad w_0 = 2 \ , \quad z_0 = 1$$

$\forall \in > 0, \quad we\ must\ find \quad \delta > 0 \quad such\ that$

$$\left|\frac{z^2-1}{z-1} - 2\right| < \in \ \ whenever\ 0 < |z-1| < \delta$$

$$|f(z) - w_0| = \left|\frac{z^2-1}{z-1} - 2\right|$$

$$= \left|\frac{(z-1)(z+1)}{z-1} - 2\right|$$

$$= |z+1-2| = |z-1|$$

$$\Longrightarrow \quad |z-1| < \in$$

Take $\delta = \in$ So we have

$$\forall \in > 0, \exists \delta > 0 : \quad \left|\frac{z^2-1}{z-1} - 2\right| < \in \ \ whenever\ 0 < |z-1| < \delta = \in$$

H.W.

Find the domain for each of the following complex functions:

1. $f(z) = z^2 + \bar{z} - |z|$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 9}$
3. $f(z) = \dfrac{1}{z + 2\bar{z} + 1}$
4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$
5. $f(z) = Arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$
6. $f(z) = \dfrac{z}{z + \bar{z}}$
7. $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$

Theorems on limits

Theorem 1: Suppose that

$$f(z) \Longrightarrow u(x,y) + iv(x,y), \;\; z = x + iy, \;\; z_0 = x_0 + iy_0, \;\; w_0 = u_0 + iv_0$$

Then

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad if\ and\ only\ if$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad and \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Theorem 2: Suppose that

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \qquad and \qquad \lim_{z\to z_0} F(z) = W_0$$

Then

$a.$ $\lim_{z\to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0$

$b.$ $\lim_{z\to z_0} [f(z)F(z)] = w_0\, W_0$

$c.$ $\lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{w_0}{W_0} \quad , \quad W_0 \neq 0$

Theorem 3: If z_0 and w_0 are points in the z and w planes, respectively, then

$a.$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ if and only if $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

$b.$ $\lim_{z\to \infty} f(z) = w_0$ if and only if $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$

$c.$ $\lim_{z\to \infty} f(z) = \infty$ if and only if $\lim_{z\to 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0$

H.W.

Find the limit [By using the theorems on limits]

1. $\lim_{z\to 1+i} (z^2 - 5z + 10)$

2. $$\lim_{z \to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{(z^2-2z+4)}$$

3. $$\lim_{z \to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z^3+8)}{(z^4+4z^2+16)}$$

4. If $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ Show that $\lim_{z \to -0} f(z)$ not exist

5. $$\lim_{z \to -1} \frac{(iz+3)}{(z+1)} = \infty$$

6. $$\lim_{z \to \infty} \frac{(2z+i)}{(z+1)} = 2$$

7. $$\lim_{z \to \infty} \frac{(2z^3-1)}{(z^2+1)} = \infty$$