كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة بالغة العربية : الدوال المركبة

اسم المادة باللغة الإنكليزية : **Complex Functions**

اسم الحاضرة التاسعة باللغة العربية: الدوال التحليلية

اسم المحاضرة التاسعة باللغة الإنكليزية : **Analytic Functions**

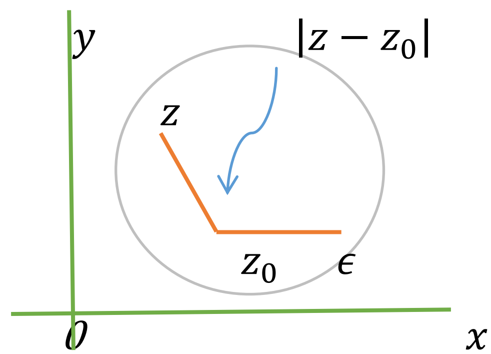
Lecture 9

Analytic Functions الدوال التحليلية

Our basic tool is the concept of an ϵ neighborhood

$$|z - z_0| < \epsilon$$

Of a given point z_0. It consist of all points z lying inside but not on a circle centered at z_0 and with a specified positive radius ϵ



Definition 1:

A functions f of the complex variable z is analytic at a point z_0 if it has a derivative at each point in some neighborhood of z_0.

A functions f is analytic in an open set if it has a derivative everywhere in in that set.

يقال ان الدالة المركبة في المتغير z تكون تحليلية عند النقطة z_0 اذا كانت قابلة للاشتقاق عند جميع نقاط جوار ما للنقطة z_0.

ويقال ان الدالة f تحليلية في المجموعة المفتوحة اذا كانت قابلة للاشتقاق في كل مكان تلك المجموعة.

Example:

1. $f(z) = |z|^2$ is not analytic at any point since its derivative exists only at $z = 0$.

2. $f(z) = \dfrac{1}{z} \; , \; z \neq 0$

$f'(z)$ exists at every nonzero point. Therefore $f(z)$ is analytic at each nonzero point.

Definition 2:

An entire function is a function that is analytic at each point in the complex plane.

يقال ان الدالة المركبة تكون كلية اذا كانت تحليلية عند جميع نقاط المستوى المركب.

Since the derivative of a polynomial exists everywhere, it follows that every polynomial is an entire function.

Definition 3:

If a function f fails to be analytic at a point z_0 but is analytic at some point in every neighborhood of z_0, then z_0 is called a singular point, or singularity of f.

اذا كانت الدالة f تحليلية في بعض نقاط جوار ما لـ z_0 عدا z_0 نفسها فأن النقطة z_0 تسمى نقطة شاذة.

Example:

1. The point $z = 0$ is singular point of the function $f(z) = \frac{1}{z}$

2. $f(z) = |z|^2$ has no singular points since it is nowhere analytic

3. $f(z) = \dfrac{z^3 + 4}{(z^2 - 3)(z^2 + 1)}$

$f(z)$ is differentiable at every point in the $z-$plane except for the points $z = \pm i$ and $z = \pm\sqrt{3}$.

Therefor $f(z)$ is analytic at every point in the $z-$plane except for the points $z = \pm i$ and $z = \pm\sqrt{3}$.

Singularity of f are $z = \pm i$ and $z = \pm\sqrt{3}$

4. $f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$u(x, y) = \cosh x \cos y$ *and* $v(x, y) = \sinh x \sin y$

$u_x = \sinh x \cos y$ *and* $v_x = \cosh x \sin y$

$u_y = -\cosh x \sin y$ *and* $v_y = \sinh x \cos y$

$\therefore \quad u_x = \sinh x \cos y = v_y$ *and* $\therefore \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$

$\therefore \quad f'(z)$ exists everywhere

$\therefore \quad f(z)$ analytic everywhere

$\therefore \quad f(z)$ is entire function

H.W.

1. Use Cauchy-Riemann equations to show that each of these functions is entire

a. $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$

b. $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

c. $f(z) = e^{-y} \sin x - ie^{-y} \cos x$

d. $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy} = g(z)h(z)$

2. Use Cauchy-Riemann equations to show that each of these functions is nowhere analytic

a. $f(z) = xy + iy$

b. $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$

c. $f(z) = e^y e^{ix}$

3. In each case, determine the singular points of the function and state why the function is analytic everywhere except at those points

a. $f(z) = \dfrac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$

b. $f(z) = \dfrac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$

c. $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$