كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم الحاضرة الثانية باللغة العربية: المبرهنات

اسم المحاضرة الثانية باللغة الإنكليزية : Theorems

Lecture 2

Theorem (1):

If $f(t)$ is a periodic of period p and (a) is any positive number, then $f(at)$ is a periodic with period $\left(\frac{p}{a}\right)$.

Proof:

Let

$$g(t) = f(at)$$

$$\therefore \quad g\left(t + \frac{p}{a}\right) = f\left(a\left(t + \frac{p}{a}\right)\right)$$

$$= f(at + p)$$

$$= f(at)$$

$$\Longrightarrow \quad g\left(t + \frac{p}{a}\right) = g(t)$$

مما سبق يتضح لنا:

Theorem (2):

For any $a > 0$ the functions $\cos(at)$ and $\sin(at)$ are periodic with period $\frac{2\pi}{a}$. In particular, if $L > 0$ then the functions:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \quad \text{and} \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right), \qquad n = 1,2,3,4,\ldots$$

are periodic with period $p = \frac{2L}{n}$

هذا واضح من النظرية السابقة (ص^4) والحقيقة ان كل من $\sin(t)$ و $\cos(t)$ هي دوال دورية بمقدار دورة 2π.

نلاحظ ان كل من $\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ و $\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ هي دالة دورية بمقدار دورة $p = \frac{2\pi}{n}$ يتبع ذلك ان $P_1 = np = 2L$ هي ايضا دورة لهذه الدوال لذلك يكون المجموع

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)$$

دوري بدوره مقدارها $2L$.

نلاحظ ان اذا كان n عدد صحيح موجب فان $\sin(nt)$ و $\cos(nt)$ دوال دورية بدورة مقدارها $\frac{2\pi}{n}$ ، وهذا واضح من نظرية١ (ص^4) وذلك لان الدالة $\sin(t)$ دالة دورية بمقدار 2π لذلك حسب النظرية١(ص^4) تكون الدالة $\sin(nt)$ دالة دورية بمقدار $\frac{2\pi}{n}$ حيث 2π يقابل p في النظرية وان n تقابل a في النظرية وكذلك الحالة للدالة $\cos(nt)$.

Example : Find the fundamental period of each of the following periodic functions:

1- $\cos(nt)$

Solution:

$$p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\Longrightarrow \; p = \pi$$

2- $\sin\left(\frac{3}{2}(t-\pi)\right)$

Solution:

$$\sin\left(\frac{3}{2}(t-\pi)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3}{2}t\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{3}{2}t\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{3}{2}t\right).(-1) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)$$

$$\therefore \quad \sin\left(\frac{3}{2}(t-\pi)\right) = \cos\left(\frac{3}{2}t\right)$$

$$\Longrightarrow \quad p = \frac{2\pi}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4\pi}{3}$$