كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم الحاضرة الثالثة باللغة العربية: التـعامـــــد

اسم المحاضرة الثالثة باللغة الإنكليزية : Orthogonality

Lecture 3

Orthogonality التعامـــــد

Two functions f and g defined on an interval $a \le t \le b$ are said to be orthogonal on the interval $[a, b]$ if

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0.$$

Theorem (3): (Orthogonality Relations)

Let m and n be positive integers, and let $L > 0$. Then :

1. $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \, \mathrm{dt} = 0$ and $\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) dt = 0$

2. $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \, . \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) t dt = 0$

3. $\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \, . \cos\left(\frac{m\pi}{L}\right) t \, \mathrm{dt} = \begin{cases} L & if \quad n = m \\ 0 & if \quad n \neq m \end{cases}$

4. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)t \ .\sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)tdt = \begin{cases} L & if \quad n = m \\ 0 & if \quad n \neq m \end{cases}$$

Proof:

1. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt} = \frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} \frac{n\pi}{L}.\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

$$= \left[\frac{L}{n\pi}\ .\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)L - \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)(-L)\right]$$

$$= \frac{L}{n\pi}\ [\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)]$$

$$= \frac{L}{n\pi}\ [\sin(n\pi) + \sin(n\pi)]$$

$$= \frac{L}{n\pi}\ [0 + 0] = 0$$

And

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt} = \frac{L}{n\pi}\int_{-L}^{L} \frac{n\pi}{L}.\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

$$= \left[\frac{-L}{n\pi}\ .\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{-L}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)L - \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)(-L)\right]$$

$$= \frac{-L}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{-L}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos(n\pi)\right]$$

$$= \frac{-L}{n\pi}\left[0 + 0\right] = 0$$

2. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t \ .\sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)t dt = 0$$

Proof : (H. W.) Use the formula:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$