كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم الحاضرة الرابعة باللغة العربية: خواص التعامـــــد

اسم المحاضرة الرابعة باللغة الإنكليزية : Properties Orthogonality

Lecture 4

3. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t \ .\cos\left(\frac{m\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt} = \begin{cases} L & if \quad n = m \\ 0 & if \quad n \neq m \end{cases}$$

Proof :

With $n \neq m$, use the formula:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

To get

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t \ .\cos\left(\frac{m\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

$$= \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L}\right)t + \cos\left(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L}\right)t\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n+m)\pi}{L}\right)t\,dt + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(n-m)\pi}{L}\right)t\,dt$$

$$= \left[\frac{L}{2(n+m)\pi}\sin\left(\frac{(n+m)\pi t}{L}\right)\right]_{-L}^{L} + \left[\frac{L}{2(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi t}{L}\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$= \frac{L}{2(n+m)\pi}(\sin(n+m)\pi + \sin(n+m)\pi)$$

$$+\frac{L}{2(n-m)\pi}(\sin(n-m)\pi+\sin(n-m)\pi)=0$$

With $n=m,$ use the formula:

$$\cos^2(A)=\frac{1}{2}[1+\cos 2A]$$

To get

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\ .\cos\left(\frac{m\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

Put $n=m$

$$=\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\ .\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}=\int_{-L}^{L}\cos^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left(1+\cos\left(\frac{2n\pi}{L}\right)t\right)\mathrm{dt}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}dt+\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{2n\pi}{L}\right)t\,\mathrm{dt}$$

$$=\left[\frac{1}{2}t\right]_{-L}^{L}+\left[\frac{L}{4n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi}{L}\right)t\right]_{-L}^{L}$$

$$=\frac{1}{2}\big(L-(-L)\big)+\frac{L}{4n\pi}(\sin(2n\pi)-\sin(-2n\pi))$$

$$= \frac{1}{2}(L + L) + \frac{L}{4n\pi}(\sin(2n\pi) + \sin(2n\pi))$$

$$= \frac{1}{2}(2L) + \frac{L}{4n\pi}(0) = \frac{2L}{2} = L.$$

4. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)t \ .\sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)t dt = \begin{cases} L & if \quad n = m \\ 0 & if \quad n \neq m \end{cases}$$

Proof : (H. W.)

For $n \neq m$, use the formula:

$$\sin(A)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

For $n = m$, use the formula:

$$\sin^2(A)\sin(b) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2A]$$