كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم الحاضرة السادسة باللغة العربية: سلاسل فورية

اسم المحاضرة السادسة باللغة الإنكليزية : Fourier Series

Lecture 6

Fourier Series سلاسل فورية

تعتبر متسلسلة فورية واحدة من اهم الادوات الرياضية التي قدمها العالم الفرنسي (Joseph Fourier). ويستخدمها مهندسي الاتصالات في تطبيقاتهم حيث نستطيع من خلال المتسلسلة كتابة دالة رياضية من خلال مجموعة من الـــ $sine$ and $cosine$.

اي ان الدالة الدورية $f(t)$ مقدار دورتها $2L$ يمكن تمثيلها على شكل متسلسلة فورية كما يلي:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t \right) \qquad (1)$$

حيث كل من a_0 , a_n , b_n هي مجموعة ثوابت (معاملات)

معامل الـــ $a_n = cosine$

معامل الـــ $b_n = sine$

ويتم حساب هذه المعاملات من خلال التكامل المحدد على فترة معطاة والتي تمثل (دورة كاملة) للدالة المراد تحليلها حيث

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t).\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t).\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\,dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

خلاصة لما سبق المعادلة (١) تسمى (متسلسلة فورية) للدالة $f(t)$ المعرفة على الفترة $[-L, L]$ حيث $f(t)$ دالة دورية بمقدار دورة 2L والاعداد (الثوابت) b_n, a_n تسمى معاملات فورية للدالة $f(t)$ والتي تأخذ قيم $f(t)$ على الفترة $[-L, L]$. ويمكن ايجاد b_n, a_n كما مبين اعلاه.

Example:(1) Compute the Fourier Series of the function $f(t) = t \quad , -\pi \leq t \leq \pi.$

Solution:

$f(t) = t \quad , \qquad L = \pi$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)t + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)t\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt = 0$$

هنا قيمة $a_0 = 0$ والسبب في ذلك لان $\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$ وذلك لان الدالة $f(t) = t$ هي دالة فردية وبتطبيق النظرية ص[14] النقطة (5) نحصل على ان $\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t).\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) t\, dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}\right) t\, dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\cos nt\, dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$a_n = 0$$

هنا قيمة $a_n = 0$ لكل قيم $n = 1,2,3,\ldots$ وذلك لان $(t.\cos nt)$ وهو مقدار حاصل ضرب دالتين احدهما فردية وهي t والاخرى زوجية وهي $(\cos nt)$ ونحن نعلم من النظرية ص[14] النقطة (3) حاصل ضرب دالة زوجية مع اخرى فردية يكون الناتج دالة فردية وعليه وبتطبيق النظرية ص[14] النقطة (5) يكون $\int_{-\pi}^{\pi} t.\cos nt\, dt$ مساويا للصفر. لذلك تكون

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}\right) t\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(0) = 0 \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t).\sin\left(\frac{n\pi}{L}\right) t\, dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\right) t\, dt \qquad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt \qquad \text{———}(*)$$

هنا (t) دالة فردية و $\sin(nt)$ دالة فردية ايضا. يكون حاصل ضربهما دالة زوجية حسب النظرية ص[14] النقطة (2). وباستخدام النظرية ص[14] النقطة (4) يمكن كتابة $\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt$ بالشكل الاتي:

$$\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt = 2\int_{0}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نحصل على ما يلي:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt \qquad \text{———}(**)$$

هنا قيمة b_n يمكن ايجادها وذلك بإيجاد قيمة $\int_{0}^{\pi} t.\sin(nt)\, dt$ باستخدام طريقة التكامل (udv)

Put

$$u = t \qquad \text{and} \qquad dv = \sin(nt)\, dt$$

$$\Longrightarrow du = dt \qquad \text{and} \qquad v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$$

$$\therefore \int_0^{\pi} t.\sin(nt)\,dt \;= [uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v du$$

$$= \left[t\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)dt$$

$$= \left[t\left(-\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n}[\pi\cos(n\pi) - (0)\cos(0)] + \frac{1}{n^2}[\sin(n\pi) - \sin(0)]$$

$$= -\frac{1}{n}[\pi\cos(n\pi)] + \frac{1}{n^2}[0 - 0]$$

$$= -\frac{1}{n}[\pi\cos(n\pi)]$$

$$= -\frac{1}{n}.\pi.(-1)^n \qquad \text{such that} \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

بتعويض قيمة التكامل في معادلة (**) نحصل على:

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[-\frac{1}{n}.\pi.(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2\pi}{\pi n}.(-1)^1(-1)^n = \frac{2}{n}.(-1)^{n+1}$$

$$\therefore \qquad b_n = \frac{2}{n}.(-1)^{n+1}$$

لان بالرجوع الى بداية المثال والتعويض عن جميع القيم في متسلسلة فورية نحصل على:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)t + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\right)t\right)$$

$$f(t) = \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((0)\cos(nt) + \left(\frac{2}{n}.(-1)^{n+1}\right)\sin(nt)\right)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}.(-1)^{n+1}\right)\sin(nt)$$

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)$$

$$t \sim 2\left[\frac{(-1)^{1+1}}{1}\sin(t) + \frac{(-1)^{2+1}}{2}\sin(2t) + \frac{(-1)^{3+1}}{3}\sin(3t) + \cdots\right]$$

$$t \sim 2\left[\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \cdots\right]$$

$$t \sim 2\sin(t) - \sin(2t) + \frac{2}{3}\sin(3t) + \cdots$$

هذا هو تمثيل فورية للدالة $f(t) = t$ *على الفترة* $[-\pi, \pi]$.