كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم الحاضرة التاسعة باللغة العربية: معادلـة الموجـة في بعد واحـد

اسم المحاضرة التاسعة باللغة الإنكليزية : One Dimension Wave Equation

Lecture 9

One Dimension Wave Equation معادلـة الموجـة في بعد واحد

هنا سنتناول دراسة معادلة الموجة في بعد واحد حيث سندرس هنا مسائل الازاحة المستعرضة للوتر المتذبذب وبعض الحالات الخاصة المهمة لها ونعمل على حل المعادلة وفق شروط حدودية وابتدائية تختلف من حالة الى اخرى.

الازاحة المستعرضة للوتر معلوم الازاحة والسرعة الابتدائيتين

لنفرض ان وترا مطاطا طوله ℓ مشدود بين نقطتين ثابتتين هما $(0,0)$ نقطة الاصل والنقطة $(\ell,0)$. وليكن هذا الوتر متجانسا (لكي تكون كتلة وحدة الطول ثابتة) يتحرك الى الاعلى والاسفل بفعل قوة الشد فقط اي بدون التأثر بأي قوة اخرى عندئذ ازاحة الوتر $u(x,t)$ عند النقطة (x,t) تعتمد على الاحداثي السيني x للنقطة المذكورة وعلى الزمن t .

لذلك يكون الوتر محققا لمعادلة الموجة المتجانسة

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{———————}(1)$$

حيث c مقدار ثابت.

او بطريقة اخرى يمكن كتابة المعادلة (١) كما يلي:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{———————}(2)$$

بما ان الوتر مشدود عند النقطتين $(0,0)$, $(\ell,0)$ فان الازاحة عند كل منها تساوي صفرا مهما يكن الزمن t , اي ان

$$u(\ell,0)=0 \;\; and \;\; u(\ell,t)=0 \qquad \text{———} \; (3)$$

الشرطان في المعادلة رقم (٣) يسمان شرطان حدوديان.

واذا فرضنا ان الازاحة الابتدائية (عندما $t=0$) تساوي$f(x)$ والسرعة الابتدائية تساوي $g(x)$

عندئذ يكون

الازاحة الابتدائية $u(x,0)=f(x)$ ،السرعة الابتدائية $u_t(x,0)=g(x)$ $0\le x\le \ell$

(4)——————— الشروط الابتدائية

الان تصبح المسألة كما يلي :

$$u_{tt}=c^2u_{xx}$$

شرط حدودي $\quad u(0,t)=0$

شرط حدودي $\quad u(\ell,t)=0$

ازاحة ابتدائية $\quad u(x,0)=f(x),\quad 0\le x\le \ell$

سرعة ابتدائية $\quad u_t(x,0)=g(x),\quad 0\le x\le \ell$

والان نحل المسألة اعلاه بحيث تحقق الشروط الحدودية والشروط الابتدائية بطريقة (فصل المتغيرات) وذلك كما يلي:

نفرض ان الازاحة $u(x,t)$ تساوي حاصل ضرب دالتين احدهما بدلالة x فقط والاخرى بدلالة t فقط اي ان :

$$u(x,t)=X_{(x)}T_{(t)} \qquad \text{————}(5)$$

نجد المشتقتين u_{tt},u_{xx} في المعادلة رقم (٥)

نحصل على :

$$u_x = X'T$$

$$u_{xx} = X''T$$

$$u_t = XT'$$

$$u_{tt} = XT''$$

نفرض عن المشتقتين u_{tt}, u_{xx} في المعادلة

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

لنحصل على :

$$XT'' = c^2 X''T$$

اي ان

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} \qquad \text{———} (6)$$

نلاحظ في المعادلة رقم (٦) ان الطرف الايمن يعتمد على x فقط وان الطرف الايسر منها يعتمد على t فقط وهذه الحالة تكون صائبة فقط عندما يكون الطرفان مساوين لعدد ثابت وليكن هذا الثابت مساويا لـــ λ عندئذ يكون:

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \quad and \ \frac{X''}{X} = \lambda$$

اي ان

$$T'' - c^2 \lambda T = 0 \qquad \text{———} (7)$$

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad \text{———} (8)$$

المعادلتان (٧) و(٨) هما معادلتان تفاضليتان اعتياديتان. مع ملاحظة ان λ هي عدد ثابت والعدد الثابت يأخذ القيم التالية

$1 - \lambda > 0$

$2 - \lambda = 0$

$3 - \lambda < 0$

ان القيم $\lambda > 0$ و $\lambda = 0$ تعطي حلول غير مقبولة لذلك نستثني القيم $\lambda > 0$ و $\lambda = 0$ وناخذ الحالة التالية وهي $\lambda < 0$ وعليه نفرض ان $\lambda = -\alpha^2$ حيث ان $\alpha > 0$ لذلك تكون $\lambda = -\alpha^2$ هي قيمة سالبة وبالتعويض عن قيمة $\lambda = -\alpha^2$ في المعادلتين (٧)و(٨) نحصل على

$$T'' - c^2(-\alpha^2)T = 0$$

$$\Longrightarrow \quad T'' + \alpha^2 c^2 T = 0 \qquad \text{———(9)}$$

and

$$X'' - (-\alpha^2)\mathrm{X} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad X'' + \alpha^2 \mathrm{X} = 0 \qquad \text{———(10)}$$

بالرجوع الى حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية ذات المعاملات الثابتة الرتبة الثانية (هذا ضروري)

نلاحظ ان المعادلة المميزة (*characteristic equation*) للمعادلة رقم (٩) هي

$$m^2 + \alpha^2 c^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad m^2 = -\alpha^2 c^2$$

$$\Longrightarrow \quad m = \pm \alpha c i$$

وهما جذران خياليان لذلك يكون حل المعادلة رقم (٩) هو:

$$T_{(t)} = A_1 \cos(\alpha c)t + B_1 \sin(\alpha c)t \qquad \text{————}(11)$$

حيث ان A_1 و B_1 ثوابت اختيارية

وان المعادلة المميزة للمعادلة رقم (١٠) هي

$$m^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad m^2 = -\alpha^2$$

$$\Longrightarrow \quad m = \pm \alpha i$$

لذلك يكون حل المعادلة رقم (١٠) هو:

$$X_{(x)} = C_1 \cos(\alpha x) + D_1 \sin(\alpha x) \qquad \text{————}(12)$$

حيث ان D_1 و C_1 ثوابت اختيارية

بالتعويض عن المعادلتين (١١)و (١٢) في المعادلة رقم (٥) نحصل على

$$u(x,t) = (A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct))(C_1 \cos(\alpha x) + D_1 \sin(\alpha x)) \text{ —}(13)$$

وبالتعويض عن الشرط الحدودي $u(0,t) = 0$ في المعادلة رقم (١٣) نحصل على

$$u(0,t) = (A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct))(C_1 \cos \alpha(0) + D_1 \sin \alpha(0)) = 0$$

$$\Longrightarrow (A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct))\big(C_1(1) + D_1(0)\big) = 0$$

$$\Longrightarrow C_1(A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct)) = 0$$

حاصل ضرب مقدارين يساوي صفر اما $C_1 = 0$ او القوس يساوي صفر. نلاحظ ان المعادلة اعلاه صحيحة لكل قيم t (حيث يمكن اختيار قيم للمتغير t بحيث يكون القوس لا يساوي صفر) وعليه تكون قيمة $C_1 = 0$.

عند التعويض عن قيمة $C_1 = 0$ في المعادلة رقم (١٣) نحصل على

$$u(x,t) = (A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct))(0 + D_1 \sin(\alpha x))$$

$$u(x,t) = (A_1 \cos(\alpha ct) + B_1 \sin(\alpha ct))D_1 \sin(\alpha x)$$

$$\therefore \quad u(x,t) = (A \cos(\alpha ct) + B \sin(\alpha ct)) \sin(\alpha x) \qquad \text{———}(14)$$

حيث $A = A_1 D_1$, $B = B_1 D_1$ وهما ثوابت اختيارية

بالتعويض عن الشرط الحدودي $u(\ell, t) = 0$ في المعادلة رقم (١٤) نحصل على

$$u(\ell, t) = (A \cos(\alpha ct) + B \sin(\alpha ct)) \sin(\alpha \ell) = 0$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha \ell) = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha \ell = n\pi$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\ell} \quad n = 1,2,3, \ldots.$$

بالتعويض عن قيمة $\alpha = \frac{n\pi}{\ell}$ في المعادلة رقم (١٤) نحصل على

$$u(x,t) = (A \cos(\alpha ct) + B \sin(\alpha ct)) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

لذلك يكون الحل $u_n(x,t)$ لكل قيمة للعدد n هو

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} ct\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

حيث ان A_n, B_n ثوابت اختيارية لكل قيم $n = 1,2,3, \ldots$

وعليه يكون حل المعادلة الاصلية هو مجموع هذه الحلول اي ان

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{——(15)}$$

لإيجاد قيم الثوابت B_n, A_n نطبق الشروط الابتدائية في المعادلة رقم (٤)

بالتعويض عن الشرط الابتدائي $u(x,0)=f(x)$ الموجود في المعادلة رقم (٤) بالمعادلة رقم (١٥) نحصل على :

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(0)+B_n\sin(0))\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=f(x)$$

$$\Longrightarrow\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{————(16)}$$

وبالتطبيق الشرط الابتدائي الاخر $u_t(x,0)=g(x)$ نحتاج لاشتقاق المعادلة رقم (١٥) بالنسبة الى t فيكون :

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi c}{\ell}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)+\frac{n\pi c}{\ell}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

بتطبيق الشرط $u_t(x,0)=g(x)$ نحصل على

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(0+\frac{n\pi c}{\ell}B_n\cos(0)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)=g(x)$$

$$\Longrightarrow\ g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{\ell}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \qquad \text{————(17)}$$

من المعادلة رقم (١٦) يتضح لنا ان A_n هي المعاملات الفورية الجيبية للدالة $f(x)$

ومن المعادلة رقم (١٧) يتضح لنا ان $\frac{n\pi c}{\ell}B_n$ هي المعاملات الفورية الجيبية للدالة $g(x)$

لذلك يكون حل مسالة الاهتزاز المستعرض للوتر المطاطي ذي الازاحة الابتدائية $f(x)$ والسرعة الابتدائية $g(x)$ هو : المعادلة رقم (١٥) اي ان

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi}{\ell} ct\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} ct\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell} x\right)$$

وقيم الثوابت B_n, A_n يمكن ايجادها من المعادلتين (١٦)و(١٧) بالترتيب عند اعطاء قيم الدوال $f(x)$ و $g(x)$ في السؤال لكل قيم $n = 1,2,3, \ldots$