كلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الفيزياء

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : م.د. مصطفى ابراهيم حميد

اسم المادة باللغة العربية : نظرية المجاميع

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Set Theory

اسم المحاضرة العاشرة باللغة العربية: امثلة على معادلـة الموجـة في بعد واحـد

اسم المحاضرة العاشرة باللغة الإنكليزية : Example in One Dimension Wave Equation

Lecture 10

ملاحظة:

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$\frac{n\pi c}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$\Longrightarrow B_n = \frac{L}{n\pi c}\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

$$\Longrightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)dx$$

مثال: اوجد الحل العام لمعادلة الموجة التالية

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad , \quad 0 \le x \le 2 \ ,0 \le t \le \infty$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(2,t) = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Solution:

بمان ان الشروط الحدودية مساوية للمسالة في ص[٢٩] اذن نستطيع الانتقال مباشرة الى الحل الموجود في ص[٣٣] معادلة رقم (١٥) اي ان

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}ct\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \qquad \text{——}\ (18)$$

نلاحظ هنا اننا عوضنا عن قيمة $\ell=2$ لان $1\le x\le 2$ في هذه المسألة

الان نطبق الشروط الابتدائية ونلاحظ هنا في هذه المسالة ان السرعة الابتدائية $u_t(x,0)$ مساوية للصفر لذلك نبدأ به لكي نتخلص من احدى الثابتين الموجودين في المعادلة رقم (١٨)

$$u_t(x,0)=0$$

نشتق اولا المعادلة رقم (١٨) بالنسبة الى t نحصل على

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi c}{2}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}ct\right)+\frac{n\pi c}{2}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

لذلك يكون

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi c}{2}A_n(0)+\frac{n\pi c}{2}B_n(1)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(0+\frac{n\pi c}{2}B_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{2}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)=0$$

$$\therefore B_n = 0$$

نفرض عن قيمة $B_n = 0$ في المعادلة رقم (١٨) لنحصل على

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}ct\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \qquad \text{————}(19)$$

هذا هو حل المسألة المطلوبة ولإيجاد قيمة الثابت A_n نطبق الشرط الابتدائي (الازاحة الابتدائية)

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ 2-x & 1 \le x \le 2 \end{cases} = f(x)$$

لنحصل على

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(0)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) = f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

لذلك يكون (من صفحة رقم ٣٤)

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$L = 2$$

$$A_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$A_n = \int_0^1 f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$

$$A_n = \int_0^1 x \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx + \int_1^2 (2 - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx$$