UNIVERSITY OF ANBAR

الكلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : أ. م. د. فراس شاكر محمود

اسم المادة باللغة العربية : نظرية احتمالية 1

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Probability Theory 1

اسم المحاضرة الثالثة باللغة العربية: اساسيات الاحتمال

اسم المحاضرة الثالثة باللغة الإنكليزية : Fundamentals of Probability.

الحالات الممكنة Exhaustive cases

هي الحالات التي تتألف من جميع الحالات المختلفة التي من الممكن أن تظهر فمثلا سحب ورقه واحدة من مجموعه ورق اللعب (٥٢ورقه) اي انها حاله ممكنه واحده في ٥٢ حاله ممكنه وهذه الحالات جميعها تشكل مجموعه حالات ممكنه

التجربة او المحاولة The experiment or Trial

أن رمي زهره النرد او قطعه النقود أو سحب ورقه اللعب من اصل ٥٢ ورقه تسمى محاوله أو التجربة

An experiment with more than one possible outcomes and whose result cannot be predicted in advance is called random experiment

النتيجة أو المحصلة outcome

هي نتيجة التجربة

فضاء العينة. Sample space

هي مجموعه النتائج الكلية الممكنة لتجربه ما

The set Ω of all possible outcomes of random experiment E is called sample space

Example: Toss of a coin if the outcomes is tail we will denote (T) if its head than (H) then the sample space for coin is ={T,H} and the sample space for a die is tossed S={1,2,3,4,5,6}

Fandamentals of probability.الاحتمال اساسيات

الحالات المتنافية(المتماثلة) Mutually exclusive cases

وهي الحالات التي عندما يكون حدوث واحد منهم فإنه يلغي الحالات البقية لحدوثها فمثلا في حالة رمي زهرة النرد فإن الأوجه الستة متنافية لأن ظهور فقط وجه واحد وهو قابل للحدوث

الحالات المستقلة Independent cases

وهي الحالات التي عندما يكون حدوث واحد منهم لا يؤثر على حدوث أو عدم حدوث الحالات البقية فمثلا زهرة النرد أو قطعة النقود عندما نرميهم يظهر كل وجه مستقل عن الآخر

Two events A and B are independents events if. The fact that a occurs does not affect the probability of B occurring

Dependent cases(الحالات المعتمدة (غير المستقلة

وهي الحالات التي عندما يكون حدوث واحد منهم يؤثر عن حدوث البقية فمثلا عند رمي زهرة النرد وظهور الأرقام الزوجية يعتمد على الأرقام (2و 4 و 6)

When the outcome or occurrence of the first event affects the outcome or occurrence of second event in such a way that the probability is changed the event are said to be dependent cases

Equally likely cases الحالات المتساوية

وهي الحالات التي تحدث بشكل متساوي في الظهور فمثلا الأرقام الزوجية والفردية في الظهور عندما نرمي زهرة النرد تعتمد على الأرقام (2 و4 و6)و(1 و3 و5) على التوالي

event الحادثة

أي جزء أو مجموعة جزئية من فضاء العينة يسمى حادثة ومجموعة كل الحوادث لفضاء العينة يسمى فضاء الحادثة فمثلا

A is { H } ,{ T } , ∅ ,{ H , T } ⊂ S

$$\Rightarrow A \text{ is event space where } \emptyset = \{\}\text{is called empty set or nill event}$$

probability event حادثة الاحتمال

إذا أنتجت حالة واحدة من أصل n من المرات أو الحالات الممكنة و المتنافية والمتماثلة حيث أن m من هذه الحالات

$(m \le n)$لصالح الحادثة Aفإن احتمال حدوث الحادثة A كنتيجة لهذه الحالة هي $P(A)=\frac{m}{n}$

....

الاحتمالية هو تكرار نسبي

Example a class contents 12 the students 5 males and 7 females find the probability of

Choose one female i)

Choose two females ii)

Answer :

$$P(A)=\frac{7}{12}=0.58$$

$$P(A)=\frac{C_2^7}{C_2^{12}}=\frac{\frac{7!}{5!2!}}{\frac{12!}{10!2!}}=\frac{10\times9\times8\times7}{12\times11\times10\times9\times8}=\frac{7}{22}=0.4161$$

Example if darling one card from the stage of number card 1 to 19 find the probability of number of the card divided on 3or 7

Answer:

A is event divided on 3. $\Rightarrow$ m1=6

B is event divided on 7 $\Rightarrow$ m2=2

Then P(A or B)=P(A)+P(B)= $\frac{6}{19}+\frac{2}{19}=\frac{8}{19}$

Theorem:(addition theorem)

Let A_1, A_2 ,….,A_k are mutually exclusive events

then P($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(\ A_k)$

$$= \sum_{i=1}^{k} p(A_i)$$

Proof: let n all the possible event and they are exclusive and mutually exclusive cases cuel

m1 subset from n to A1

m2 subset from n to A2

. . . . .

mK subset from n to AK

Then probability of A1 or A2 or…… or Ak is

P(A1 or A2 or…… or Ak)=$\frac{m_1+m_{2+\cdots+}m_k}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}+\cdots+\frac{m_k}{n}$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} p(A_i)$$

Theorem :let $A_{1,}A_{2,} \cdots, A_k$ are independent cases (events) then probability

P$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1).P(A_2).\dots.P(A_k)$

Proof: if k=2

let n_1 the number of all possible cases for A_1event

let n_2 the number of all possible cases for A_2event

and let $n_1 + n_2$ the number of all possible cases for $A_{1,}A_2$event

then p($A_1 \cap A_2) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A_1).P(A_2)$

generally ,

P$(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \frac{m_1 \cdot m_2 \dots m_k}{n_1 \cdot n_2 \dots n_k} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \dots \cdot \frac{m_k}{n_k} = P(A_1).P(A_2).\dots.P(A_k)$

Example a box contains 6 balls 4 white and 2 red balls another box contains 8 balls 3 white and 5 red find the probability if drawn two white balls

Answer:

p($A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2)$=$\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

Exercises:

اذا كان في أسئلة امتحانيه مطلوب الإجابة على ثمان أسئلة فقط من اصل عشره

i) بكم طريقة يمكن اختيار ثمان أسئلة $\binom{10}{8}$

ii) بكم طريقة يمكن الإجابة على الأسئلة إذا كان من الواجب الإجابة على الأسئلة الثلاثة الأولى $\binom{7}{5}$

iii) بكم طريقة يمكن الإجابة على الأسئلة إذا كان من الواجب الإجابة على أربع على الأقل من الأسئلة الخمسة ألاولى

$$\binom{5}{4}\binom{5}{4}+\binom{5}{3}\binom{5}{5}$$

إذا كان احتمالية فوزA في سباق ما هو ضعف احتمالية فوزB وإن احتمالية فوزB هو ضعف احتمالية فوزC وليكن

فأوجد $A=\frac{4}{7}$ $B=\frac{2}{7}$ $C=\frac{1}{7}$

ما هي احتمالية فوز كل واحد منهم p(A),P(B),P(C)

ما هي احتمالية فوز A أوB P(A or B)=P(A)+P(B)

ما هي احتمالية فوز A أوB أو C P(A or B or C)=P(A)+P(B)+P(C)

Axiom: Given

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n,\dots\}\textit{ is a sample space we can assign to each sample point } w_j \textit{ of } \Omega \textit{ a number } P(w_j), \textit{Such that}$$

i) $0\le p(w_j)\le 1$

ii) $P(\omega_1)+p(\omega_2)+\dots+p(w_j)+\dots=\sum p(w_j)=1$

Axiom1: p(A) is areal number such that p(A)≥0 for any event A on Ω

Theorem: if A1 $\subset$ A2 Then $P(A_1)\le P(A2)$

PROOF: A2=$A_1\cup(A_1^C\cap A_2)$ and $A_1\cap(A_1^C\cap A_2)\neq\emptyset$

$\Rightarrow P(A_2)=P(A_1 U \ (A_1^C\cap A_2))\ge 0$ *by axiom* 1

$P(A_2)\ge P(A_1)$

Axiom2: p(Ω)=1 , A is event and A^C denote the complement of A then P(A)+p(A^C)=1

Theorem: for each A $\subset\Omega$,then $0\le p(A)\le 1$

By axiom 1 $p(A)\ge 0$ hence $p(A^C)=1-p(A)\ge 0$ hence $p(A)\le 1$

Axiom 3 if $A_1, A_2.., A_n$ are n events such that any two of them are disjoint

$A_j \cap A_k = \emptyset$ for $j \neq k$ $(j, k = 1,2, \dots, 4)$ then $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots p(A_k)$ $sepical\ case$ $p(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $, P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

We have described $A - B$ as the set of points which are in A but not is B. in notation A\B=A-B it is easy to verify that A\B=A-A∩B

Theorem : if A and B are any two events , then $p(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Proof: Decompose the event A into two mutually exclusive event A/B and $A \cap B$,we can write event A as following A={A\B} ∪ { $A \cap B$ }

Note that {A\B} ∩ { $A \cap B$ } =∅

By axiom 3 p(A)= {A\B} + { $A \cap B$ } ⇒p(A\B)=P(A) – P(A∩B)=P(A∩ B^C)

Note that A\B= A∩ B^C

Theorem: for any two events A and B defined on Ω P(A∪B)=P(A)+P(B)- P($A \cap B$)

Proof : consider the event A ∪ B =A∪ ($A^C \cap B$) and A ∩ ($A^C \cap B$)= ∅

$Then\ A^C \cap B = B - A \cap B\ there\ form$

$$P(A \cup B) = P\big(A \cup (A^C \cap B)\big) = p(A) + P(A^C \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Example : Rolling the two dice

Sample space (s)={(1,1), (1,2),…(1,6),…,(6,6)}=36 pair

A={(2,4),(3,6),(5,6)}=3 , B={(3,4),(3,6),(1,6)}=3

P(A)= $\frac{3}{36}$,P(B)= $\frac{3}{36}$,A ∩ B={(3,6)} =1

P(A∩B)= $\frac{1}{36}$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

Find :

$P(A^C \cup B^C) = P(A \cap B)^C = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

$$P(A^C \cap B^C) = P(A \cup B)^C = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

P(A\B)=$P(A \cap B^C) = p(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

P(B\A)=$P(B \cap A^C) = p(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

Exercises

1)Given P(A)= $\frac{1}{3}$,P(B)= $\frac{1}{4}$, *P(A∩B)*= $\frac{1}{6}$ *find* $P(A^C), P(A^C \cup B), P(A \cup B^C), P(A \cap B^C), P(A^C \cup B^C)$

2) for any two event A and B , show that

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A^C)P(B) - P(A^C \cap B) = P(A)P(B^C) - P(A \cap B^C)$$