UNIVERSITY OF ANBAR

الكلية : التربية للعلوم الصرفة

القسم او الفرع : الرياضيات

المرحلة: الثالثة

أستاذ المادة : أ. م. د. فراس شاكر محمود

اسم المادة باللغة العربية : نظرية احتمالية 1

اسم المادة باللغة الإنكليزية : Probability Theory 1

اسم المحاضرة الرابعة باللغة العربية: الاحتمالات الشرطية

اسم المحاضرة الرابعة باللغة الإنكليزية : .Conditional Probability

Conditional Probability الاحتمالات الشرطية

Definition : Let B be an event with positive probability p(B)>0 . The conditional probability p(A/B) of an event A given the event B $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad P(B)\neq 0$

يرمز لاحتمالية حدوث الحادثة A مع العلم ان الحادثة B قد حدثت بالرمز P(A/B) وتعرف بالاحتمالية الشرطية ل A معطاة B وبنفس الطريقة بالنسبة الى P(B/A) هي احتمالية الشرطية ل B معطاه A وعلية فان

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad P(B)\neq 0$$

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\quad P(A)\neq 0$$

IF A and B are independent event then

$$P(A/B)=\frac{P(A)\,p(B)}{P(B)}=\ P(A),\text{and}\quad P(B/A)=\frac{P(B)\,p(A)}{P(A)}\quad P(B)$$

Comment :a) A and B are subset of sample space and we want to define P(A/B) . Therefore, we need P(B) greater than zero.

b) $p(A/\Omega)=\frac{P(A\cap\Omega)}{P(\Omega)}=\frac{P(A)}{1}=P(A)\quad and\ P(B\ /\ \Omega)=P(B)$

Properties of Conditional Probability

1. We are assume that $A, B \subseteq \Omega$, p(A)> 0 and p(B)> 0 for any event A.

$$0 \leq P(A / B) \leq 1.$$

2. We know that $A\cap B\subset B$,

$$0\leq P(A\cap B) \leq P(B) \text{ and } 0 \leq P(B) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(A / B) \leq 1.$$

3. *P(A / B)=0 if and only if* $A\cap B$ *is null event (mutually exclaim* $A\cap B=\emptyset$ *)*
4. *If* $A=\emptyset \Rightarrow P(\emptyset / B)=0$ *also if A , B are disjoint events then P(A / B)=0.*
5. *P(A / B)=1 if and only if* $P(A\cap B)=P(B)$.

6. $A \cap B = B \; if \;\; B \subseteq A$, $hence \; P(A \cap B) = P(B) \Rightarrow P(A / B) = 1$ Or if A= Ω , $P(\Omega / B)=1$ *also* , $P(B / B)=1$
7. $P(A_1 \cup A_2 / B) = P(A_1 / B) + P(A_2 / B) - P(A_1 \cap A_2 / B)$ Since $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$, we have P($(A_1 \cup A_2) \cap B$) =P$(A_1 \cap B) \cup P(A_2 \cap B)$ = P$(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)$
8. $P(A_1 \cup A_2)/B \;) = \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) - P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(B)}$
9. By definition $P(A_1 \cup A_2)/B \;) =$ P$(A_1/B) + P(A_2/B) - P(A_1 \cap A_2/B)$

Corollary : if A_1 andA_2 are disjoint events ,P$(A_1 \cap A_2/B)$=0 Then $P(A_1 \cup A_2)/B \;)$ =$P(A_1/B) + P(A_2/B)$

Example : A_n enquiry was launched to investigate the complaints of employees working in a public sector in all hundred workers was interviewed the information summarized was as:

Complaints			
	true	**false decision**	Total
Complaint accepted	20	5	25
complaint rejected	8	67	75
Total	28	72	100

Define : the event A and B as follows

A:complaint is true v.s. B: complaint is accepted

1) Obtain probabilities of following events

a) A , B , A^C, B^C, $A \cap B$, $A \cup B$

b) B/A , B/A^C , B^C /A , B^C /A^C

c) A/B , A/B^C , A^C /B , A^C/B^C

2) verify the following resalt

a) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$

$$b)\ P(A \,/\, B) + P(A^C \,/\, B) = 1 \quad , \quad P(B \,/\, A) + P\left({B^C}/{A}\right) = 1$$

Answer:

1) From the give table

a) p(A)= 0.28 , $p(\,A^C) = 1 - 0.28 \;= 0.72$

p(B)=0.25 P(B^C) $= 1 - 0.25 = 0.75$ $p(\,A \cap B) = 0.20$,

$$p(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(\,A \cap B) = 0.28 + 0.25 - 0.20 = 0.33$$

$P(A \cap B^C) = 0.08$

$P(A^C \cap B) = 0.05$

$P(A^C \cap B^C) = 0.67$

b) P(B/A)= $\frac{0.20}{0.28} = 0.7143$

P(B/A^C)= $\frac{0.05}{0.72} = 0.0694$

P(B^C /A) = $\frac{0.08}{0.28} = 0.2857$

P(B^C /A^C)= $\frac{0.67}{0.72} = 0.9306$

c)P(A/B)= $\frac{0.20}{0.25} = 0.80$

P(A/B^C)= $\frac{P(A \cap B^C)}{1 - P(B)} = 0.20$

P(A^C/B^C)= $\frac{P(A^C \cap B^C)}{1 - P(B)} = 0.8933$

2. a) $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) = 0.20 + 0.08 = 0.28$

$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B) = 0.20 + 0.05 = 0.25$

$b)\ P(A/B) + P(A^C/B) = 0.80 + 0.20 = 1$

$$P(B\ /\ A) + P\left({}^{B^C}\!/_{A}\right) = 0.7143 + 0.2857 = 1$$

مثال/ صندوق يحتوي على 6 كرات حمراء و4 بيضاء فاذا سحبت كرتان على التوالي بدون ارجاع فما هو احتمال ان تكون الكره الثانية حمراء على ان الكرة الأولى حمراء ؟

الحل/

A حادثة كون الكرة الأولى حمراء

B حادثة كون الكرة الثانية حمراء

$$p(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{C_2^6}{C_2^{10}} \Big/ \frac{C_1^6}{C_1^{10}} = \frac{\dfrac{6!/(6-2)!\,2!}{10!/(10-2)!\,2!}}{\dfrac{6!/(6-1)!\,1!}{10!/(10-1)!\,1!}}$$

مثال/ اذا كانت احتمالية عيش رجل لمدة 25 سنة هي 0.7 وان احتمالية عيش زوجته لمدة 25 سنة هي 0.8 فما احتمالية :

1) عيشهما سوية ؟
2) فقط الرجل يعيش؟
3) فقط الزوجة تعيش ؟
4) عدم عيش أي منهم ؟

الحل /

A حادثة كون عيش الرجل P(A)=0.7

B حادثة كون عيش الزوجة P(B)=0.8

1) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.7)(0.8) = 0.56$

2) $P(A \cap B^C) = P(A)P(B^C) = P(A)(1 - P(B)) = (0.7)(0.2) = 0.14$

3) $P(A^C \cap B) = P(A^C)P(B) = \big(1 - P(A)\big)\big(P(B)\big) = (0.3)(0.8) = 0.24$

4) $p(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C) = (0.3)(0.2) = 0.6$