* 4 * Comparison Test :-

* نقوم بهذا الاختبار بمقارنة المتسلسلة (اي بالسؤال) مع متسلسلة اخرى (من راسي) بحرف خصائصها يعني هل هي div & conv و نكتب العلاقة بينهم و بطبق كالتالي :-

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$\Rightarrow$ If $\sum b_n$ conv $\longrightarrow \sum a_n$ is conv

$\Rightarrow$ If $\sum a_n$ div $\longrightarrow \sum b_n$ is div

* يعني بـ اختصار اذا الكبيرة conv الصغيرة كمان conv

واذا الصغيرة div الكبيرة كمان div

» والعكس غير صحيح ..

↳ Test faild ↘

Test دور على غيره ^^

Ex :- Test for Convergence or divergence ?

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2}$ → Conv by p-test, $p = 2 > 1$

↳ Conv by Comparison test

2) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$ → div by p-test, $p = 1$

↳ div by C.T

الصغيرة div ⇐ الكبيرة div لما ان

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3+5n} < \frac{4}{n^3}$ → Conv by p-test, $p = 3 > 1$

↳ Convergent by C.T

الكبيرة Conv ⇐ الصغيرة Conv

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow r = \frac{1}{3} < 1$

So Conv by geometric series

↳ Conv لما ان الصغيرة ⇐ الكبيرة Conv

Scanned with CamScanner

* بعض المقارنات الشائعة :-

$\ln(n) < n$ ، $\frac{\sin}{\cos} < 1$ ، $\frac{1}{f(n)} > \frac{1}{f(n)+\text{عدد}}$

$\ln(n) < \sqrt{n}$ ، $\tan^{-1}(n) < \frac{\pi}{2}$ ، $\frac{1}{f(n)} < \frac{1}{f(n)-\text{عدد}}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^5} \Rightarrow \frac{\ln(n)}{n^5} < \frac{n}{n^5} = \frac{1}{n^4}$ ← Conv by p-test $p=4>1$

Conv الكبيرة ⇐ Conv الصغيرة الكبير

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{n-1}} > \frac{5^n}{2^n} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$ ← $r=\frac{5}{2}>1$ div by Geo Series

يمكن حل السؤال على ال geometric

div by C.T

div الكبيرة كمان ⇐ div الصغيرة

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+1}{n^4}$ $\quad \sin(n) < 1$

Conv الصغيرة ⇐ Conv الكبيرة اذاً $\frac{\sin(n)+1}{n^4} < \frac{2}{n^4}$ ← Conv by p-test $p=4>1$

So $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)+1}{n^4}$ is Convergent by C.T

Scanned with CamScanner

* 5 * Limit Comparison Test :-

* نستخدم هذا الاختبار عند فشل استخدام Comparison test لـ ، خطواته :-

1) نفرض متسلسلة (من راسي) سهلة ونسميها b_n

2) نجد قيمة ← $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ونطبق كالتالي :-

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ← من السؤال (من راسي)

$= \begin{cases} > 0 \to (a_n, b_n) \to \text{الهم نفس الحلول} \\ \quad \text{Con} \to \text{Conv} \ , \ \text{div} \to \text{div} \\ = 0 \ , \text{if } b_n \text{ Conv} \to a_n \text{ Conv} \\ = \infty \ , \text{if } b_n \text{ div} \to a_n \text{ div} \end{cases}$

but

if $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ & b_n is div ما يقدر احدد

if $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ & b_n is Conv والله ما يقدر احدد 🙂

Scanned with CamScanner

* طيب على أي اساس افرض الـ b_n ؟؟

1) اذا كانت الـ a_n = $\frac{poly}{poly}$ ← b_n = $\frac{\text{اكبر قوة}}{\text{اكبر قوة}}$

2) اذا كانت الـ a_n = مثلثي ← b_n = الزاوية
$\sin(\ ), \cos(\ )$

3) اذا كان مقام الـ a_n اقتران واحد ← b_n = $\frac{1}{\text{نفس المقام}}$

4) الاقترانات الجذرية يتم معاملتها زي الـ poly
يعني نفس النقطة الاعلى فوقه ♠ .

Ex : Are the following series Conv or div ?

[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2+1}$

$\Rightarrow b_n = \frac{\text{اكبر قوة}}{\text{اكبر قوة}} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ ← div by p-test, $p=1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n+4}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n+4}{n^2+1} * \frac{n}{1} = \frac{n^2+4n}{n^2+1}$

$\Rightarrow C.R \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = [1]$ ← نفس السلوك so a_n is div

5

Scanned with CamScanner

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{2n^5+5n^4-2n}$

$\Rightarrow b_n = \frac{\text{اكبر حدة}}{\text{اكبر حدة}} = \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3}$ ← Conv by p-test, $p = 3 > 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-1}{2n^5+5n^4-2n} * \frac{n^3}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+n^4-1}{2n^5+5n^4-2n}$

use C.R $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2n^5} = \frac{1}{2} > 0$ ← نفس السلوك $= \frac{\infty}{\infty}$ ^L

b_n is Conv so a_n is also Convergent ✻ by L.C.T

3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^7-2n^2+1}}$

$b_n = \frac{n^3}{n^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ← div by p-test, $p = \frac{1}{2} \leq 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^7-2n^2+1}} * \frac{n^{\frac{1}{2}}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{7/2}}{\sqrt{n^7-2n^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}$!!

use C.R $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{7}{2}}}{n^{\frac{7}{2}}} = \boxed{1} > 0$ ← نفس السلوك

$\Rightarrow b_n$ is div so a_n is also div by L.C.T

Scanned with CamScanner

4| $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+5}{n(n-1)(n-2)}$ Home work

5| $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

b_n = الزاوية $= \frac{\pi}{n}$ ← div by p-test $p=1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1$ ← تقس اللوك

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

So b_n is div so a_n is also div by l.c.T

Scanned with CamScanner

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

$b_n = \frac{1}{\text{اكبر}} = \frac{1}{n^2}$ ← Conv by p-test

$p = 2 > 1$

$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} * \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1 > 0$

نفس الباور

$\Rightarrow b_n$ is Conv so a_n is also Conv

7) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{\text{اكبر}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ← div by p-test

$p = \frac{1}{2} \leq 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \ln(n) = \ln(\infty)$

$= \infty$ STOP !!

$\Rightarrow b_n$ is div & lim $= \infty$

b_n is div

So a_n is div by L.C.T

So a_n is div

Scanned with CamScanner