جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الاولى

المودولات

مقدمة

1 – 1 تمهيد

يتبين من الخبرة أن دراسة المودولات فوق حلقة تبديلية R تتطلب معاملة خاصة ومعرفة واسعة حول الحلقة R نفسها. ربما كان أحد الأسباب، لذلك هو أن قيمة مفهوم المودول هي في وضع الإديال I في الحلقة R وعامل الحلقة R/I على قدم المساواة. إننا، في دراسة الحلقات (البنى الجبر "2") نعتبر الإديال I بنية جزئية في الحلقة R، في حين نعتبر R/I بنية عاملية أو نسبية لـ R: في الحقيقة، يمكن اعتبار كلتا البنيتين R – مودولين.

إن وضع المودولات بالنسبة إلى الحلقات التبديلية هو تماماً كوضع الفراغات الشعاعية بالنسبة إلى الحقول. ومع ذلك، لأن بنية الحلقات التبديلية هي أكثر تعقيداً وصعوبة في الفهم من بنية الحقول، فإن نظرية المودولات أكثر تعقيداً وصعوبة في الفهم من نظرية الفراغات الشعاعية. وكمثال على ذلك، إن بعض العناصر غير الصفرية في حلقة تبديلية ليس لها نظير، يعني أنه لا يمكننا إدخال مفهوم الاستقلال الخطي والارتباط الخطي ونظرية المودولات، في الحالة العامة، ليلعبا الدور نفسه الذي يلعبانه في نظرية الفراغات الشعاعية.

إن مفهوم المودول يعمم كلا من مفهوم الزمرة التبديلية، ومفهوم الفراغ الشعاعي، ومفهوم الحلقة.

قبل إعطاء تعريف رسمي للمودول يُطلب من القارئ تذكر أنه إذا كانت E مجموعة غير خالية، فإننا نعني بعملية داخلية على E، أو بقانون تشكيل داخلي على E، التطبيق $f: E \times E \to E$. من أجل كل من $x, y \in E$ نكتب $f(x,y)$، عادة، بالشكل $x+y$، $x \cdot y$، xy، xfy، $x\Delta y$، $x*y$، $x0y$ ... إلخ.

إن شبه زمرة $(E,0)$ هي مجموعة غير خالية E بالإضافة إلى عملية ثنائية (قانون تشكيل داخلي) 0، تجميعية (تجميعي):

$$0: E \times E \to E$$

إن مونوئيداً $(E, 0, e)$ هو شبه زمرة $(E, 0)$ بالإضافة إلى عنصر حيادي (واحدة) e، أي أن:

$$e0x = x0e = x \ , \ \forall x \in E$$

إن اختيار $e \in E$ يمكن اعتباره عملية صفرية على E، وبالتالي، المونوئيد هو بنية جبرية معرف عمليتان 0 و e. من أجل كل مجموعة E، المجموعة المؤلفة من كل التطبيقات $f : E \to E$ هي مونوئيد ، حيث عملية تركيب التطبيقات هي العملية الثنائية على E والتطبيق المطابق على E هو الواحدة.

الزمرة هي مونوئيد لكل عنصر فيه نظير، أي كل عنصر فيه قلوب. لتكن E مجموعة غير خالية. تسمى تطبيقات من الشكل $u : E \to E$، $f : E \times E \to E$، $g : E \times E \times E \to E$، ... عملية أحادية، عملية ثنائية، عملية ثلاثية، ... على الترتيب. وإذا n عدداً صحيحاً موجباً و $E^n = E \times \cdots \times E$ جداءً ديكارتياً (أو كارتيزياً) لـ E بنفسها n مرة، فإن عملية n – ية على E تُعرّف بأنها التطبيق:

$$f : E^n \to E$$

وبشكل خاص، إذا كان $n = 0$، فإننا نعرف E^0 بأنها المجموعة $1=\{1\}$، المؤلفة من عنصر واحد فقط. عندئذ، تكون عملية صفرية على E هي التطبيق $c:1\to E$. بما أن هذا التطبيق له قيمة واحدة فقط فإن إعطاء التطبيق c يكافئ إعطاء $c(1)$، وبعبارة أخرى، العملية الصفرية على مجموعة ما E تكافئ اختيار عنصر ما من E.

الحلقة هي مجموعة غير خالية E معرف عليها عمليتان داخليتان (قانونا تشليل داخليان) تكتبان بالشكل:

$$(x,y)\mapsto x+y \qquad\qquad (x,y)\mapsto xy$$

بحيث تتحقق الشروط:

1. $(E,+)$ زمرة تبديلية.
2. $(E,\times)$ شبه زمرة.
3. من أجل كل $x\in E$، y، z يكون:

$$x(y+z)=xy+xz \quad , \quad (y+z)x=yx+zx$$

فيما يأتي ندرس تطبيقات من الشكل $F \times E \to E$، حيث E و F مجموعتان غير خاليتين. يرمز عادة لمثل هذا التطبيق بالرمز $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$، حيث $\lambda \in F$ و $x \in E$.

على الرغم من أن λx يرمز إلى وضع $\lambda \in F$ على يسار $x \in E$، فإننا نرجع إلى هذا الرمز كجداء لعناصر E من اليسار بعناصر من F. تسمى عناصر F سلميات أو عناصر سلمية. يسمى التطبيق $f : F \times E \to E$، المُعرّف بهذا الشكل قانون تشليل (تركيب) خارجي من اليسار على E. وبالمثل نعرف قانون تشكيل خارجي على E من اليمين بأخذ $E \times F \to E$ بدلاً من $F \times E \to E$ وكتابة $(x, \lambda) \mapsto x\lambda$ بدلاً من $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

ملاحظة: إن قانون التشكيل الداخلي على E هو حالة خاصة من قانون التشليل الخارجية، وذلك بأخذ $E = F$.

نعلم أن الفراغ الشعاعي هو زمرة تبديلية ما V، حقل ما F، وتطبيق $F \times V \to V$ يحقق بعض الشروط. لتكن G زمرة تبديلية ما. نعلم كيف نضرب عنصراً ما من G بعنصر ما من $\mathbb{Z}$ ونحصل على عنصر من G: إذا كان $\mathbb{Z} \ni n > 0$ و $G \ni g$، فإن:

$$ng = g + \cdots + g \qquad (n \text{ مرة})$$

وبوضع $(-n)g = -(ng)$ و $0g = 0$ يتم التعريف. إذاً، لدينا:

$$\mathbb{Z}\times G\to G$$

هذا التطبيق يحقق نفس الشروط (القوانين) التي يحققها التطبيق $F\times V\to V$، أي أنه يحقق:

1. $(mn)g=m(ng)$.
2. $(m+n)g=mg+ng$.
3. $m(g+h)=mg+mh$.
4. $1g=g$

من أجل كل $G\ni h,g$ و $\mathbb{Z}\ni n,m$.

والتعميم المناسب للحالتين السابقتين هو في التعريف الرسمي التالي للمودول.

تعريف 1.2.1: لتكن R حلقة كيفية و M مجموعة معرف عليها عملية ثنائية " + ". تسمى M R – مودولاً يسارياً، أو مودولاً يسارياً فوق R إذا وجد التطبيق:

$$\bullet : R \times M \to M$$

بحيث إذا رمزنا بـــ rm لصورة ثنائية (r, m) بالنسبة إلي "•" فإن الشروط (القوانين) الآتية محققة:

1. $(rs)m = r(sm)$ ؛
2. $(r+s)m = rm + sm$ ؛
3. $r(m+n) = rm + rn$:
4. إذا كانت الحلقة R بواحدة 1، فإن $1\,m = m$ من أجل كل $M \ni n, m$ و كل $R \ni s, r$.

وبالشكل نفسه نُعرّف R – مودولاً من اليمين، وذلك بأخذ التطبيق $\bullet : M \times R \to M$، وكتابة mr، صورة الثانية (m, r)، أي كتابة عناصر R على يمين عناصر M بدلاً من كتابتها على يسارها في حالة المودول اليساري.

تعطى فيما يلي بعض الملاحظات الهامة، ولذلك يجب الانتباه إليها بكل عناية.

ملاحظات:

(1) نصطلح على تسمية عناصر R سلميات أو مقادير سلمية، ونسمي الجداء rm $(M \ni m, R \ni r)$ جداءً سلمياً بدلاً من التسمية جداء m بالسلمية r، للاختصار، على أن لا يؤدي ذلك إلى أي التباس في التسمية مع الجداء السلمي لعناصر الفراغ الشعاعي كما هي الحال في الجبر الخطي، حيث يدرس ذلك المفهوم.

(2) إذا كانت الحلقة R تبديلية، فإن كل R – مودول يساري هو أيضاً R – مودول يميني بتعريف $rm = mr$. الشرط الوحيد الذي يجب التحقق منه هو الشرط (1)، ولكن:

$$m(rs) = (rs)m = (sr)m = s(rm) = s(mr) = (mr)s$$

(3) وبشكل أعم، إذا وجد أفتومرفيزم معاكس على الحلقة R [أي إذا وجد هومومرفيزم حلقات f على R حيث $f(rs)=f(s)f(r)$]، فكل R – مودول يساري هو R – مودول يميني بتعريف $mr=f(r)m$ مرة ثانية، الشرط الوحيد الذي يجب التحقيق منه هو الشرط (1)، لكن:

$$\begin{aligned}(mr)s &= f(s)(mr)=f(s)(f(r)m)\\ &=(f(s)f(r))m\\ &=f(rs)m\\ &=m(rs)\end{aligned}$$

(4) لتكن R حلقة كيفية و R^0 الحلقة التي عناصرها نفس عناصر R وعملية الجمع على R و R^0 واحدة، لكن الجداء على R^0 معرف بالعلاقة $r\cdot s=sr$ حيث الجداء في الطرف الأيمن من هذه العلاقة هو على R، بينما الجداء في الطرف الأيسر منها هو على R^0. عندئذ، كل R – مودول يساري هو، بشكل طبيعي، R^0 – مودول يميني، وبالعكس: إذا كان M R – مودولاً يسارياً، نُعرّف جداء من اليمين $m\cdot r$ بالعلاقة $m\cdot r=rm$. كما في الملاحظة (2)، كل ما يُطلب التأكد منه هو التأكد من الشرط (1). لكن:

$$m\cdot(r\cdot s)=(r\cdot s)m=(rs)m=s(rm)=s(m\cdot r)=(m\cdot r)\cdot s$$

إن نظريتي R – مودولات يسرى و R – مودولات يمنى متوازيتان كلياً، وبالتالي، لتجنب التكرار مرتين نختار التعامل مع إحدى الجهتين: اليسرى أو اليمنى، ونختار اليسرى مثلاً. إذاً، فيما يلي سوف نتعامل مع R – مودولات يسرى ما لم يذكر خلاف ذلك.

إن تطبيق نظرية المودولات على تمثيل الزمر يستدعي استخدام المودولات اليسرى واليمنى معاً في حالة الحلقات غير التبديلية.

(5) إن شروط تعريف المودول اليساري (أو اليميني) تعمم من أجل أي عدد من العناصر (سواءً من الحلقة R أو من المودول M). كما أن:

$$(r-s)m=rm-sm$$
$$m(r-s)=mr-ms$$

من أجل كل $s,r\in R$ و $m\in M$.

تعريف 2.2.1: لتكن R و S حلقتين، و M زمرة تبديلية. تسمى M (R,S) ثنامودولاً إذا كانت R – مودولاً يسارياً و S – مودولاً يمينياً بآن واحد، وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك، الشرط:

$$r(ms)=(rm)s$$

من أجل كل $r \in R$، و $s \in S$ و $m \in M$.

مثلا، كل R – مودول يساري هو $(R,\mathbb{Z})$ – ثنامودول، وكل S – مودول يميني هو $(\mathbb{Z},S)$ – ثنامودول. إذا كانت R حلقة تبديلية، فكل R – مودول يساري أو R – مودول يميني هو (R,R) – مودول.

إن مفهوم الثنامودول يلزم في كثير من المجالات كالجداء التنسوري، مثلاً، وفي تمثيل الزمر. ومع ذلك فلن نُدرس هذا المفهوم إلا بالقدر الذي يلزمنا في دراستنا الحالية.

هناك بنية جبرية هامة تلزمنا في المستقبل، وهي الجبر.

تعريف 3.2.1: لتكن M R – مودولاً. يسمى M R – جبراً إذا كان بآن واحد R – مودولاً وحلقة، حيث عملية الجمع في الحالتين واحدة، والجداء على M والجداء بسلميات من R يحققان العلاقة:

$$r(m_1m_2) = (rm_1)m_2 = m_1(rm_2)$$

من أجل كل $m_1, m_2 \in M$ و $r \in R$. مثلا، كل حلقة هي $\mathbb{Z}$ – جبر، وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن R هي R – جبر.

لتكن R و S حلقتين و $f: R \to S$ هو مومرفيزم حلقات حيث $C(S) \supseteq f(R)$، مركز S:

$$C(S) = \{c \in S : ca = ac, \forall a \in S\}$$

إذا كان M S – مودولا، فإن M هو R – مودول أيضاً، باستخدام الجداء السلمي $am = f(a)m$ من أجل كل $a \in R$ وكل $m \in M$. بما أن S هو S – مودول، فإنه ينتج أن S هي R – مودول، وبما أن $C(S) \supseteq \mathrm{Im}(R)$، فإننا نستنتج أن S هي R – جبر.