جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الثانية

في المودولات

نعطي مؤقتا التعريف الآتي، على أننا سوف نعود إليه مستقبلاً لما له من الأهمية.

تعريف 4.2.1: لتكن M و M' R – مودولين. يسمى التطبيق:

$$f : M \to M'$$

R – هومومرفيزم مودولات أو R – تطبيقاً خطياً إذا كان:

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad (1) \text{ ؛}$$

$$f(rm) = rf(m) \quad (2) \text{ ؛}$$

من أجل كل $m_1, m_2 \in M$ و $r \in R$.

إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن التعريف السابق يكافئ التعريف الآتي.

تعريف 5.2.1: لتكن R حلقة بواحد 1، M و M' $R-$ مودولين. يسمى التطبيق $f:M\to M'$ $R-$ هومومرفيزم مودولات إذا تحقق الشرط:

$$f(r_1m_1+r_2m_2)=r_1f(m_1)+r_2f(m_2)$$

من أجل كل $m_1,m_2\in M$ و $r_1,r_2\in R$.

يُطلب من القارئ برهان تكافؤ تعريفي هومومرفيزم المودولات السابقين.

إذ الشرط (1) في تعريف هومومرفيزم المودولات يعني أن f هو هومومرفيزم زمر.

إذ نواة f كهومومرفيزم مودولات هي نواته كهومومربزم زمر، أي أن:

$$\mathrm{Ker}(f)=\{m\in M: f(m)=0\in M'\}$$

ملاحظة: يجب الانتباه إلى الفرق بين هومومرفيزم الحلقات وبين هومومرفيزم المودولات. إن هذا الفرق يكمن في الشرط (2)، أي في صورة الجداء. ففي حالة المودولات، لدينا:

$$f(rm) = rf(m) \quad ; \quad r \in R \, , \, m \in M$$

وفي حالة الحلقات، لدينا:

$$f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2) \quad ; \quad \forall r_1, r_2 \in R$$

إذا نظرنا إلى R كمودول فوق نفسها، وإذا كان:

$$f : R \to M'$$

هومومرفيزم مودولات، فإن:

$$f(rs) = rf(s)$$

بينما إذا كانت M' حلقة و $f : R \to M'$ هو هومومرفيزم حلقات، فإن:

$$f(rs) = f(r) f(s)$$

نرمز لمجموعة الهومومرفيزمات من M إلى M' بالرمز $\mathrm{Hom}_R(M,M')$، أو بالرمز $L(M,M')$. إذا كان $M = M'$، فإن $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ يرمز لها بالرمز $\mathrm{End}_R(M)$، وتسمى $\mathrm{End}_R(M)$ مجموعة الإندومرفيزمات على M. إذا كان $f \in \mathrm{End}_R(M)$ واحدة (قلوبا)، فإنه يسمى أقتومرفيزما. يرمز لمجموعة الأقتومرفيزمات على M بالرمز $\mathrm{Aut}_R(M)$.

إذا كان مفهوما من النص ما هي الحلقة R، أي إذا لم يؤدي ذلك إلى أي التباس، فاننا نرمز للمجموعات السابقة بالرموز $\mathrm{Hom}(M,M')$، $\mathrm{End}(M)$، $\mathrm{Aut}(M)$.

تعريف 6.2.1: لتكن M R − مودولا، و $M \supseteq N$ مجموعة جزئية غير خالية. تسمى N مودولا جزئيا في M إذا كان:

(1) $(N,+)$ زمرة جزئية في $(M,+)$؛

(2) $rn \in N$ كلما كان $r \in R$ و $n \in N$.

إذا الشرط (1) في التعريف 6.2.1 يعني أن $n-n' \in N$ كلما كان $n,n' \in N$.

إذا كانت الحلقة R بواحدة، فإن التعريف 6.2.1 يكافئ التعريف الآتي.

تعريف 6'.2.1: تسمى المجموعة الجزئية غير الخالية N في المودول M مودولاً جزئياً إذا كان:

$$rx+sy \in N$$

من أجل كل $s,r \in R$ و $y,x \in N$.

يُطلب من القارئ برهان تكافؤ تعريفي المودول الجزئي السابقين.

نظرية 7.2.1: لتكن R حلقة ما، M و M' R – مودولين، و $f:M\to M'$ R – هومومرفيزم مودولات (R – تطبيقاً خطياً)، N و N' مودولين جزئيين في M و M' على الترتيب. عندئذ:

(1) $f(N)$ مودول جزئي في M'؛

(2) $f^{-1}(N')$ مودول جزئي في M؛

(3) $\mathrm{Ker}(f)$ مودول جزئي في M.

البرهان: ينتج مباشرة من التعريف.

تعريف 8.2.1: ليكن F حقلاً ما. يسمى كل F – مودول، F – فراغاً شعاعياً.
وإذا كان V و W F – فراغين شعاعيين، فإن F-هومومرفيزم مودولات $f:V\to W$ يسمى F – تطبيقاً خطياً.

نختم هذا البند بالنظرية الآتية والتي تعطي بعض النتائج الأولية من تعريف المودول.

نظرية 9.2.1: ليكن M R – مودولاً، من أجل كل s, r من R وكل n, m من M يكون:

1) $0m = 0 = r0$ ؛

2) $(-r)m = r(-m) = -(rm)$ ؛

3) $(-r)(-m) = rm$ ؛

4) $(-1)m = -m$ ؛

5) $r(n-m) = rn - rm$ ؛

6) $(r-s)m = rm - sm$ ؛

إذا كان F حقلا ما و M F – فراغاً شعاعياً، فإن:

7) $rm = 0 \Leftrightarrow$ إما $m = 0$ وإما $r = 0$.

البرهان:

(1) لدينا:

$$r0 = r(0+0) = r0 + r0$$

$$\Rightarrow r0 - r0 = 0 = r0 + r0 - r0 = r0$$

$$m0 = m(0+0) = m0 + m0$$

$$\Rightarrow m0 - m0 = 0 = m0 + m0 - m0 = m0$$

(2) لدينا:

$$0 = 0m = (r + (-r))m = rm + (-r)m \Rightarrow (-r)m = -(rm)$$

و بالمثل:

$$0 = r0 = r(m + (-m)) = rm + r(-m) \Rightarrow r(-m) = -(rm)$$

(3) لدينا:

$$(-r)(-m) = -(r(-m)) = -(-(rm)) = rm$$ بحسب (2)

(4) لدينا:

$$(-1)m = -(1m) = -m$$

(5) لدينا:

$$r(n - m) = r(n + (-m)) = rn + r(-m) = rn - rm$$

(6) لدينا:

$$(r - s)m = (r + (-s)m) = rm + (-s)m = rm - sm$$

(7) إذا كان $rm = 0$ و $r \neq 0$ فإن:

$$m = 1m = (r^{-1}r)m = r^{-1}(rm) = r^{-1}0 = 0$$

وإذا كان $m = 0$ أو $r = 0$، فإن $rm = 0$ بحسب (1).

تعريف 10.2.1: ليكن $f:M\to M$ R – اندومرفيزما و $M\supseteq N$ مودولا جزئياً. نقول إن N لا متغير بالنسبة إلى f أو N f – لا متغير إذا كان $N\ni f(x)$ كلما كان $N\ni x$، وبعبارة أخرى، N مودول جزئي f – لا متغير إذا كان $N\supseteq f(N)$.

1 – 3 أمثلة

مثال 1: لتكن A زمرة تبديلية جمعية. عندئذ A هي $\mathbb{Z}$ – مودول أيسر (أيمن أيضاً)، لأن:

(1) $(mn)a = m(na)$ ؛

(2) $(m+n)a = ma + na$ ،

(3) $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2$ ؛

(4) $1a = a$.

من أجل كل $m \in \mathbb{Z}$ و كل $a, a_1, a_2 \in A$.

أضف إلى ذلك، إذا كانت A و A' زمرتين تبديليتين جمعيتين و $f : A \to A'$ هومومرفيزم زمر، فإن f هو أيضا $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم مودولات، لأن $(0 < n)$:

$$f(na) = f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$$

$$f(-a) = -1f(a)$$

مثال 2: لتكن M مجموعة المصفوفات من القياس $m \times n$ فوق الحلقة R. عندئذ، M هي R – مودول يساري بالنسبة إلى عملية جمع المصفوفات العادية وعملية جداء مصفوفة (من اليسار) بسلمية $a \in R$:

إذا كانت $A = \left[a_{ij}\right]$ و $R \ni a$ فإن $aA = \left[a\bar{a}_{ij}\right]$

وبشكل خاص، فإن $1 \times n$– (أو $n \times 1$) – مصفوفات، أي مجموعة الـ n – يات والتي نرمز لها بالرمز R^n، هي R – مودول. ولذلك غالباً ما نطابق بين $M_{1\times n}(R)$ و $M_{m\times 1}(R)$، و R^m. وكذلك غالباً، ما نعتبر R^m مودول الجداء الديكارتي لـ R بنفسها m مرة، أي مجموعات الـ m – يات فوق R، مودول الأسطر:

$$\left[a_1 \quad \cdots \quad a_m\right]$$

أو مودول الأعمدة:

$$[a_1 \cdots a_m]^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

وإذا كانت $R = \mathbb{R}$ و $n = 2$ أو $n = 3$، فإننا نحصل على أن مجموعة الأشعة في المستوي أو في الفراغ تشكل فراغاً شعاعياً فوق $\mathbb{R}$.

إذا عرفنا جداء مصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ من $M_{m,n}(R)$ بالسلمية $r\in R$ بالعلاقة $Ar=\left[a_{ij}r\right]$، فإن $M_{m,n}(R)$ تصبح $R-$ مودولاً يمينياً.

مثال 3: لتكن R حلقة بواحدة 1، و M $R-$ مودولاً. عندئذ، $M_n(R)$ حلقة بواحدة. إن جداء المصفوفات:

$$M_m(R)\times M_{m,n}(R)\to M_{m,n}(R)$$
$$(A,B)\mapsto AB$$

و

$$M_{m,n}(R)\times M_n(R)\to M_{m,n}(R)$$
$$(A,B)\mapsto AB$$

يجعل $M_{m,n}(R)$ مودولاً يسارياً فوق الحلقة $M_m(R)$ ومودولاً يمينياً فوق الحلقة $M_n(R)$.

مثال 4: ليكن M و M' R – مودولين. عندئذ، الجداء الديكارتي $M \times M'$ هو R – مودول بالنسبة إلى العمليتين:

$$(x,x')+(y,y')=(x+y,x'+y')$$
$$r(x,y)=(rx,ry)$$

من أجل كل $x,y \in M$ و $x',y' \in M'$ و $r \in R$. يسمى المودول $M \times M'$ الجداء الديكارتي (الكارتيزي) لـ M و M'. وبشكل عام، إذا كانت $M_1,\cdots,M_n$ R – مودولات فإن:

$$M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1,\cdots,x_n)\ ;\ x_i \in M_i\ , i=1,\cdots,n\}$$

R – مودول بالنسبة إلى العمليتين:

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$
$$r(x_1,\cdots,x_n)=(rx_1,\cdots,rx_n)$$

يسمى المودول $M_1 \times \cdots \times M_n$ الجداء الديكارتي (الكارتيزي) للمودولات $M_1,\cdots,M_n$.