



جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر
كتاب البنى الجبرية ٣
(المودولات)
د. محمد حسن الهوشي
منشورات جامعة تشرين
سوريا

المحاضرة الثالثة

في المودولات

مثال 5: لتكن R حلقة و I إیدالاً يسارياً في R . علنذا، I هو R - مودول يسارى، وإذا كان J إیدالاً يمينياً في R ، فهو أيضاً R - مودول يمينى. وفي كلتا
الحالتين، الجداء السلمي هو تماماً الجداء في الحلقة.

مثال 6: لتكن R حلقة و $I \subset R$ إیدالاً ما. إن عامل الحلقة R/I هو R - مودول يسارى و R - مودول يمينى في آن معاً بحسب تطبيق الجداء:

$$R/I \times R \rightarrow R/I$$

$$R \times R/I \rightarrow R/I$$

$$(a+I, b) \mapsto ab + I \quad (a, b+I) \mapsto ab + I$$

ملاحظة: يجب التأكد من أن كلاً من التابعين السابقين مُعرف جيداً، أي أن كلاً منهما هو بالحقيقة تطبيق. لكن ذلك سهل، فمثلاً، إذا كان $b+I = b'+I$ في $I \in R$ | R ، فإن $b-b' \in I$ و $r(b-b') = rb - rb' \in I$. إذاً:

$$rb+I = rb'+I \quad \text{أو} \quad rb - rb' + I = I$$

والتطبيق مُعرف جيداً. وبشكل مماثل نناقش الحالة الثانية. إن هذا المثال يدعونا إلى التحذير الآتي: لنتأمل عامل الحلقة $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ كمودول فوق \mathbb{Z} وفقاً للمثال السابق. عندئذ $3+6\mathbb{Z} \neq 0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ في \mathbb{Z} . لكن:

$$2(3+6\mathbb{Z}) = 6+6\mathbb{Z} = 0 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

إذاً، نتيجة جداء عنصر مختلف عن الصفر من مودول بسلمية مختلفة عن الصفر هو في هذه الحالة الخاصة، صفر. إن مثل هذه الحالة لا يمكن حدوثها في الفراغات الشعاعية فوق الحقل. وعلى القارئ ملاحظة ذلك دائماً والانتباه إليه.

مثال 7: إذا كان M و M' - مودولين، فلن $\text{Hom}_R(M, M')$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى العملية:

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad \forall m \in M, \quad \forall f, g \in \text{Hom}_R(M, M')$$

ولكن إذا أردنا جعل هذه الزمرة R - مودولا بالطريقة المألوفة بتعریف af بالعلاقة:

$$(af)(m) = af(m), \quad \forall m \in M$$

نجد أن الشائع af ليس من الضروري أن يكون R - هومومورفزمًا لم تكن R تبديلية. وللوضوح ذلك، نلاحظ أن:

$$(af)(rm) = af(rm) = a(f(rm)) = arf(m)$$

وهذا التعبير الأخير يساوي $r(af(m)) = raf(m)$ فقط عندما تكون الحلقة R تبديلية ولكن ليس بالضرورة إذا لم يكن الأمر كذلك. إذاً، إذا كانت الحلقة R تبديلية، فإن $\text{Hom}_R(M, M')$ تصبح R - مودولاً من أجل كل R - مودولين M و M' ، بينما إذا لم تكن الحلقة R تبديلية، فإن $\text{Hom}_R(M, M')$ تظل زمرة تبديلية فقط. بما أن $\text{End}_R(M)$ حلقة حيث عملية الجداء هي جداء التطبيقات، وبما أنه يوجد هومومورفزم حلقات:

$$\phi: R \rightarrow \text{End}_R(M)$$

معروف بالعلاقة $\phi(a) = a\text{id}_M$ حيث id_M التطبيق المطابق على M ، فإنه ينتج من التعريف 3.2.1، وأن $\text{End}_R(M)$ هي R - جبر، إذا كانت R حلقة تبديلية.

مثال 8: إذا كانت G زمرة تبديلية، فإن G هي \mathbb{Z} - مودول، والتطبيق:

$$\phi: \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow G$$

المعروف بالعلاقة $\phi(f) = f(1)$ هو هومومورفизм زمرة غامر ومتباين، أي أن ϕ هو إيزومورفزم زمرة. إن ϕ هو \mathbb{Z} - إيزومورفزم مودولات:

$$\phi(rf) = \phi(f + \dots + f) = \phi(f) + \dots + \phi(f) = r\phi(f)$$

هذا المثال يعمم كما يلي.

مثال 9: ليكن M - مودولا. عندئذ:

$$\text{Hom}_R(R, M) \cong M$$

بحسب التطبيق $\phi: \text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M$ المعروف بالعلاقة:

$$\phi(f) = f(1)$$

مثال 10: لتكن R حلقة تبديلية، و M – مودولاً، ولتكن S حلقة جزئية في $\text{End}_R(M)$. عندئذ، M هو S – مودول بحسب تطبيق الجداء السلمي $S \times M \rightarrow M$ المعرف بالعلاقة:

$$(f, m) \rightarrow f(m)$$

مثال 11: إن هذا المثال هو حالة خاصة من المثال السابق. لتكن M – مودولاً، و $\exists T \in \text{End}_R(M)$. نعرف هومومورفيزم الحلقات:

$$\phi: R[x] \rightarrow \text{End}_R(M)$$

بمقابلة x بـ T و $a \in R$ بـ $a\text{id}_M$. إذا كان:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$$

فإن:

$$\phi(f(x)) = f(T) = a_0\text{id}_M + a_1T + \cdots + a_nT^n$$

ليكن $[R[T]]$. إن الجداء:

$$R[T] \times M \rightarrow M$$

$$(f(T), m) \mapsto f(T)m = f(T)(m)$$

يتحول M إلى $R[T]$ - مودول. وباستخدام الهومومورفزم:

$$\phi: R[x] \rightarrow R[T]$$

نجد أن M هو $F[x]$ - مودول بواسطة الجداء السلمي:

$$F[x] \times M \rightarrow M$$

$$(f(x), m) \mapsto f(x)m = f(T)(m)$$

هذا المثال هو في غاية الأهمية، كما سنرى مستقبلاً. إنه يشكل قاعدة لتطبيق نظرية المودولات فوق $P.I.D$ لدراسة إندورفيزمات فراغ شعاعي محدود القياس. لنعطي مثالاً

بساطاً على المثال 11.

مثال 12: ليكن F حقلًا ما، و $T: F^2 \rightarrow F^2$ إندومorfizمًا مُعرفًا بالعلاقة $T^2 = 0$. عندئذ، إذا كان:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in F[x]$$

فإن:

$$f(T) = a_0 + a_1T$$

لذلك، إذا كان $v = (s, b) \in F^2$ فإن الجداء السلمي $f(x)v$ يعطى بالعلاقة:

$$\begin{aligned} f(x)v &= f(x)(a, b) = f(T)(a, b) \\ &= (a_0\text{id}_{F^2} + a_1T)(a, b) \\ &= (a_0a + a_1b, a_0b) \end{aligned}$$

مثال 13: لتكن R حلقة بواحدة 1، ولتكن:

$$R' = R^N = \{f: N \rightarrow R\}$$

أي أن R' هي مجموعة متتاليات عناصر من R . نعرف على R' عملية جمع " + " بالشكل: من أجل كل $f, g \in R'$ نعرف:

$$f + g: N \rightarrow R$$

بالعلاقة $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$. عندئذ، تصبح R' زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع السابقة واحتتها التطبيق الصفرى 0. وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن قانون الجداء السلمي:

$$R \times R' \rightarrow R' ; (r, f) \mapsto rf$$

يجعل R' $-R$ - مودولاً.

إن هذا المثال هام جدا كما سنجد مستقبلاً بعضاً من فوائده.

مثال 14: لتكن $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. إن V زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية الجمع " + " المعرفة بالعلاقة:

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

كما أن تطبيق الجداء السلمي $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ ، المُعرَّف بالعلاقة:

$$(r, (a, b)) \mapsto r(a, b) = (ra, rb)$$

يجعل V إلى \mathbb{R} - فراغ شعاعي. إذا، V منتهي التوليد فوق \mathbb{R} ، لأن:

$$V = \mathbb{R}(1, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 1)$$

إن هذا الفراغ يمثل هندسياً المستوى الكاريزي (الديكارتي). إذا كان F حفلاً ما، فإن $V = F \times F$ فراغ شعاعي فوق F . وتوضيح ذلك، تماماً كما في حالة \mathbb{R} السابقة.

مثال 15: ليكن F حفلاً ما، و n عدداً صحيحاً موجباً. لنكن:

$$V = F^n = F \times \cdots \times F \quad (n \text{ مرّة})$$

إن V فراغ شعاعي فوق F بالنسبة للعمليتين:

تطبيق الجمع $V \times V \rightarrow V$, حيث:

$$((a_i), (b_i)) \mapsto (a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) ; \quad 1 \leq i \leq n$$

وتطبيق الجداء السلمي، حيث:

$$(a, (a_i)) \mapsto a(a_i) = (aa_i) ; \quad 1 \leq i \leq n$$

إن V متنهي التوليد فوق F ، فهو مولد بالمجموعة:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

أي أن:

$$V = F^n = Fe_1 \oplus \dots \oplus Fe_n$$

كل فراغ شعاعي محدود القياس فوق الحقل F هو أحد هذه الفراغات من أجل «ما».

ملاحظة: إذا كان $n = 1$ ، فإن V الزمرة الجمعية لـ F ، والجداء السلمي هو تماماً الجداء في F . إذًا، كل حقل يمكن اعتباره فراغاً شعاعياً فوق نفسه.