جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الرابعة

في المودولات

مثال 16: لتكن R حلقة ما. إن $R[x]$ مودول فوق R. وإذا كان F حقلاً ما، فإن $F[x]$ فراغ شعاعي فوق F. إن هذا الفراغ غير منتهي التوليد فوق F، فهو مولد بالمجموعة:

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$$

مثال 17: إذا كان M R – مودولاً و $x \ni M$، فإن المجموعة:

$$Rx = \{rx : r \in R\}$$

هي R – مودول جزئي في M، لأن:

$$rx - sx = (r-s)x \in Rx, \quad \forall r, s \in R$$
$$r(sx) = (rs)x \in Rx, \quad \forall r, s \in R$$

مثال 18: ليكن M R – مودولاً و $x \in M$. عندئذ:

$$N = \{r x + n x : r \in R,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

مودول جزئي في M يحوي x، وإذا كانت R حلقة بواحدة، فإن $N = Rx$. إن $(N,+)$ زمرة جزئية في $(M,+)$، كما يمكن التأكد من ذلك بكل سهولة. وإذا كان $R \ni a$ و $N \ni rx + nx$ فإن:

$$\begin{aligned} a(rx+nx) &= a(rx)+a(nx) \\ &= (ar)x + a(x+\cdots+x) \\ &= (ar + a + \cdots + a)x \\ &= a(rx+nx) \end{aligned} \quad \Big\} \ (0<n)$$

$$\begin{aligned} &= (ar)x + a((-x)+\cdots+(-x)) \\ &= (ar + (-a) + \cdots + (-a))x \end{aligned} \quad \Big\} \ (0<n)$$

$$= a(rx+nx)$$

لأن $(-a)x = a(-x)$، لذلك فإن:

$$a(rx+nx)=ux\ ,\ u\in R$$

إذاً، $a(rx+nx)\ni N$ من أجل كل $r,a\ni R$ وكل $n\ni\mathbb{Z}$. نأخذ الآن $r=0$ و $n=1$، فنجد أن $x\ni N$. من الجدير بالملاحظة أنه إذا كان $L\subseteq M$ مودولاً جزئياً يحوي x، فإن L يحتوي كل العناصر من الشكل $rx+nx$، $r\ni R$ و $n\ni\mathbb{Z}$. لذلك $L\supseteq N$. إذاً، N هو أصغر مودول جزئي في M يحوي x ويرمز له بالرمز $<x>$.

نفرض الآن أن R حلقة بواحدة 1، ولنبرهن أن $N=Rx$. أولاً من الواضح أن $N\supseteq Rx$، وبالعكس، إذا كان $rx+nx$ من N و $n>0$، فإن:

$$\begin{aligned} rx+nx &= rx+(1x+\cdots+1x) \\ &= (r+1+\cdots+1)x=ux,\ u\in R \end{aligned}$$

وإذا كان $rx+nx\ni N$ و $n\geq 0$، فإن $rx+nx\ni Rx$. إذاً، $N\supseteq Rx$، وينتج من ذلك أن $N=Rx$.

مثال 19: ليكن M $R-$ مودولاً و $M \supseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$، وليكن:

$$N = \{r_1x_1 + \cdots + r_nx_n \ ; \ r_i \in R\}$$

إن N مودول جزئي في M. إذا كان $x = \sum_i r_ix_i$ و $y = \sum_i s_ix_i$، فإن:

$$x - y = \sum_i r_ix_i - \sum_i s_ix_i = \sum_i (r_i - s_i)x_i \in N$$

وإذا كان $a \ni R$، فإن:

$$ax = a\sum_i r_ix_i = \sum_i a(r_ix_i) = \sum_i (ar_i)x_i \in N$$

إذاً، N مودول جزئي في M.

وبشكل عام، إذا كان M يمثل $R-$ مودول، و $X \subseteq M$ مجموعة جزئية. لتكن:

$$N = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_ix_i \ : r_i \in R, x_i \in X \right\}$$

أي أن N هي مجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر X بأمثال من R. إن N مودول جزئي في M، كما يمكن التأكد من ذلك بسهولة. وإذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن N هو أصغر مودول جزئي في M يحوي X لأن $1x = x \ni N$ في هذه الحالة. وإذا كان L مودولا جزئيا في M يحوي X، فهو يحوي كل التراكيب الخطية من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \text{ ، حيث } X \ni x_i, R \ni r_i$$

إذاً، $N \subseteq L$ و $(L \supseteq X)$ $N = \bigcap L$. يسمى N في هذه الحالة مودولاً جزئياً في M مولدا بالمجموعة X، ونرمز له بالرمز $N = \langle X \rangle$. إذا كانت X منتهية فإننا نقول إن N منتهي التوليد، أو مولد بمجموعة منتهية. إذا كان X وحيد العنصر، x مثلاً، فإن:

$$N = \langle \{x\} \rangle = \langle x \rangle$$

يسمى مودولاً دورياً أو مودولاً رئيساً مولداً بـــ x.

يمكننا تعريف المودول الجزئي N المولد بمجموعة ما X بطريقة أخرى.

مثال 20: ليكن M R – مودولاً و $(N_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M.

عندئذ:

$$\bigcap_{i\in I} N_i$$

مودول جزئي في M.

وإذا كانت $M \supseteq X$ مجموعة جزئية و $(N_i)_{i\in I}$ أسرة كل المودولات الجزئية في M والتي تحوي X، فإن:

$$N = \bigcap_{i\in I} N_i$$

أصغر مودول جزئي في M يحتوي X. إن التقاطع $\bigcap N_i$ مودول جزئي في M لأن:

$$x,y \in N,\ r,s \in R \Rightarrow x,y \in N_i,\ \forall i \in I,\ r,s \in R$$
$$\Rightarrow rx+sy \in N_i$$
$$\Rightarrow rx+sy \in \bigcap N_i$$

وإذا كان K مودولاً جزئياً في M يحوي X، فإن $K \in (N_i)$، وبالتالي $N = \cap N_i \subseteq K$.

هناك عملية هامة جداً على المودولات الجزئية في R – مودول M.

مثال 21: ليكن M R – مودولاً، و $(N_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات جزئية في M.

ليكن $\sum_{i\in I} M_i$ مودولاً جزئياً في M مولداً بالمجموعة $\cup_{i\in I} M_i$، أي أن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = \langle \cup_{i\in I} M_i \rangle$$

وبعبارة أخرى $\sum_{i\in I} M_i$ أصغر مودول جزئي في M يحوي جميع المودولات الجزئية M_i من أجل $I \ni i$. لنبرهن أن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = \left\{ \sum_{\text{محدود}} x_i \ : \ x_i \in M_i \right\}$$

لتكن:

$$S = \left\{ \sum_{\text{محدود}} x_i \ : \ x_i \in M_i \right\}$$

من الواضح أن S مودول جزئي في M، من الواضح أيضاً أن $S \supseteq M_i$ من أجل كل $i \in I$. إذا، $\bigcup_{i\in I} M_i \subseteq S$. وبحسب تعريف $\sum_{i\in I} M_i$ تكون $N = \bigcup_{i\in I} M_i \subseteq S$. لكن $N \supseteq S$ وضوحاً. إذاً $S = N$.

إذا كانت I مجموعة منهية، $I = \{1, 2, \cdots, n\}$، مثلاً، فإن:

$$N = \sum_{i\in I} M_i = M_1 + \cdots M_n$$

إذا كان كل عنصر $x \ni N$ يكتب بشكل وحيد ، الشكل:

$$x = \sum_{\text{محـــدود}} x_i \ , \ x_i \in M_i$$

فإن المجموع $\sum_{i\in I} M_i$ يسمى مجموعاً مباشراً، ويرمز له بالرمز $\oplus \sum_{i\in I} M_i$ أو بالرمز $\oplus_{i\in I} M_i$.

إذا كانت I منتهية، $I = \{1, 2, \cdots, n\}$، مثلاً، فإن:

$$\oplus_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$

تمرين: ليكن R M – مودولا، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M، برهن تكافؤ الفرضيات الآتية:

1. $\sum_{i\in I} M_i$ مجموع مباشر.
2. $\sum_{i\in I} M_i \ni \sum_i x_i = 0$ تقتضي أن $x_i = 0$ من أجل كل i.
3. $M_i \cap \left(\sum_{j\in I} M_j \right) = \langle 0 \rangle$ ، $i \ni I$.

لنا عودة إلى المجموع المباشر في البند 5 من هذا الفصل.

1 – 4 عامل المودول

ليكن M R – مودولاً و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً في M. نعرف العلاقة $\sim_N$ على M كما يلي:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N, \quad \forall x, y \in M$$

إن العلاقة $\sim$ المعرفة بهذا الشكل هي علاقة تكافؤ.

إذا كان $x \sim y$، فإنا نكتب ذلك بالشكل $x \equiv y (\mathrm{mod}\, N)$، ونقول إن x يكافئ y بالقياس N. نرمز لصف التكافؤ العنصر x بالرمز $\overline{x}$. من الواضح أن:

$$\overline{x} = \{x + n : \ n \in N\} = x + N$$

نرمز لمجموعة صفوف التكافؤ لعناصر M بالقياس N بالرمز M/N. نعرف على M/N عمليتين ثنائيتين كما يلي:

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \quad , \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in M/N$$

$$r\overline{x} = \overline{rx} \quad , \quad \forall r \in R, \forall \overline{x} \in M/N$$

اعتماداً على طريقة بناء عامل الزمرة، نجد مباشرة أن M/N هي مودول. يسمى هذا المودول عامل المودول M بالنسبة إلى المودول الجزئي N، أو اختصاراً عامل M بـ N أو عامل المودول M بالقياس N.

نُعرّف التطبيق:

$$\varphi : M \longrightarrow M/N$$

بالعلاقة $\varphi(x) = x + N$ من أجل كل $M \ni x$، إن φ هو R – هومومرفيزم مودولات غامر نواته N. لنبرهن ذلك.

من أجل كل $M \ni x, y$ و كل $R \ni s, r$ لدينا:

$$\begin{aligned}\varphi(rx + sy) &= rx + sy + N \\ &= rx + N + sy + N \\ &= r(x + N) + s(y + N) \\ &= r\varphi(x) + s\varphi(y)\end{aligned}$$

و φ هو R – هومومرفيزم مودولات. من الواضح أن φ غامر. كما أن:

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \left\{x \in M:\ \varphi(x) = 0 \in {}^{M}\!/_{N}\right\} \\ &= \left\{x \in M:\ \varphi(x) = x + N \in {}^{M}\!/_{N}\right\} \\ &= \{x \in M:\ x \in N\} \\ &= N \end{aligned}$$

يسمى الهومومرفيزم φ الهومومرفيزم الطبيعي أو القانوني، كما يسمى الإسقاط الطبيعي أو القانوني.

إذا كانت الحلقة R حقلا، فإن ${}^{M}\!/_{N}$ يسمى عامل الفراغ M بالقياس N، أو عامل الفراغ M بـــ N. إنه لمن الطبيعي دراسة عامل المودول ${}^{M}\!/_{N}$، من حيث شكل المودولات الجزئية فيه وما علاقتها بالمودولات الجزئية في M.

نظرية 1.4.1: ليكن M R – مودولاً، و $M \supseteq N$ مودولاً جزئياً. إن المودولات الجزئية في M/N هي من الشكل L/N، حيث L مودول جزئي في M يحوي N.

البرهان: ليكن $\varphi : M \longrightarrow M/N$ الهومومرفيزم (الإسقاط) الطبيعي، و K مودولاً جزئياً في M/N. ليكن:

$$L = \varphi^{-1}(K) = \{x \in M : \varphi(x) \in K\}$$

إن L مودول جزئي في M [النظرية 7.2.1، (2)]. إذا كان $x \ni N$، فإن $K \ni \varphi(x) = x + N = N = \overline{0}$ و $L \supseteq N$. إذا كان $K \ni x$ فإن $M \ni y$، $\varphi(y) = x$ لأن φ غامر. وبحسب تعريف L، فإن $L \ni y$. إذاً، $\varphi(L) = K$. لكن:

$$\varphi(L) = \{x + N : x \in L\}$$
$$= L/N$$

وبذلك يتم المطلوب. □

1 – 5 نظريات الإيزومرفيزم

نعرض الآن بعض النظريات العامة، والتي تسمى "نظريات الإيزومرفيزم النيوترية". هذه النظريات شبيهة بتلك التي درسناها في الزمر والحلقات (انظر البنى الجبرية "2"، والبنى الجبرية "1". لقد أعطينا تعريف هومومرفيزم المودولات سابقاً (انظر التعريف 4.2.1).

نبدأ بالنظرية الآتية:

نظرية 1.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الأولى): ليكن M و M' R – مودولين و $f: M \longrightarrow M'$ هومومرفيزم R – مودولات، عندئذ $M/\mathrm{Ker}(f) = M'$.

البرهان: نعرف التطبيق $\overline{f}: M/\mathrm{Ker}(f) \to M'$ بالعلاقة التالية:

$$\overline{f}(m+\mathrm{Ker}(f))=f(m),\ \forall m\in M$$

تماماً، كما في حالة الزمر، أو في حالة الحلقات، نجد أن $\overline{f}$ R – هومومرفيزم غامر ومتباين، أي أن $\overline{f}$ إيزومرفيزم مودولات.

نظرية 2.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثانية): ليكن M R – مودولاً، N و P مودولين جزئيين في M، عندئذ $(N+P)/P\cong N/N\cap P$.

البرهان: نأخذ الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi: M\longrightarrow M/P$، وليكن $\varphi\mid N=\varphi_0$.

عندئذ φ_0 هو R – هومومرفيزم مودولات، نواته هي:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_0)=N\cap P$$

وصورته هي:

$$\mathrm{Im}(\varphi_0)=(N+P)/P$$

إذاً، بحسب النظرية 1.5.1 يكون:

$$N/P\cap N\cong(N+P)/P$$

كما هو مقرر في نص النظرية. □