



جامعة الأنبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د. محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الخامسة

في المودولات

نظرية 3.5.1 (نظرية الإيزومرفيزم الثالثة): ليكن M - R مودولاً، P و N

مودولين جزئيين في M ، حيث $N \supseteq P$ ، عندئذ:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

البرهان: نُعرف التطبيق $f: M/P \rightarrow M/N$ بالعلاقة:

$$f(m+P) = m+N$$

إن f معروف جيداً: ليكن $m+P = m'+p$ ، عندئذ $m-m' \in P$ ، وبالتالي:

$$f(m-m'+P) = m-m'+N = N$$

$$\Rightarrow m+N = m'+N$$

إن نواة f هي:

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f) &= \{m+P \in M/P : m+N = N\} \\ &= \{m+P \in M/P : m \in N\} \\ &= N/P\end{aligned}$$

إذا، بحسب النظرية 1.5.1 نجد:

$$M/N \cong (M/P)/(N/P)$$

□

كما هو مقرر.

نظرية 4.5.1 (نظرية التقابل): ليكن M - R مودولاً، N مودولاً جزئياً في M

و $\varphi: M \rightarrow M/N$ الإسقاط الطبيعي، عندئذ، يُعرف التقابل $P \mapsto P/N$ تقابلاً

1-1 بين مجموعة المودولات الجزئية في M والتي تحوي N وبين مجموعة المودولات

في M/N ، وهذا التقابل يحافظ على الاحتواء.

البرهان: لتكن $S_1 = \{P : P \supseteq N\}$ ومجموعة المودولات الجزئية في

$S_2 = \{M/N\}$ نعرف $\alpha : S_1 \longrightarrow S_2$ بالعلاقة التالية:

$$\alpha(P) = \text{Im}(\varphi_0) = P/N \quad \text{حيث } \varphi_0 = \varphi|_N$$

أولاً، إن α متباين: ليكن $P_1, P_2 \in S_1$ و $\alpha(P_1) = \alpha(P_2)$ ، عندئذ، من أجل كل

$x \in P_1$ يكون $x_1 + N = \varphi(x_1) \in P_1/N = P_2/N$ ، ليكن $x_2 + N = x_1 + N$ ،
 $P_2 \ni x_2$ ، وينتج من ذلك أن:

$$x_1 - x_2 \in N \subseteq P_2 \Rightarrow x_1 \in P_2 \Rightarrow P_1 \subseteq P_2$$

وبالمثل نجد $P_2 \subseteq P_1$ ، إذا $P_2 = P_1$ و α متباين.

ثانياً، α غامر: ليكن $K \in S_2$. عندئذ $\varphi^{-1}(K)$ مودول جزئي في M يحوي N

و $\alpha(\varphi^{-1}(K)) = K$ ، وبالتالي، α غامر. إذا α تقابل 1-1 بين S_1 و S_2 . \square

لنعد الآن إلى المجموع المباشر لأسرة مودولات جزئية منتهية. لنكن M_1, \dots, M_n - مودولات. بحسب تعريف الجداء الديكارتي لهذه الأسرة يكون

$$M = \prod_{i=1}^n M_i = M_1 \times \dots \times M_n$$

- مودولاً.

لنكن N_1, \dots, N_n مودولات جزئية في M_1, \dots, M_n ، على الترتيب، عندئذ

$$N = \prod_{i=1}^n N_i = N_1 \times \dots \times N_n$$

مودول جزئي في M كما يمكن التأكيد من ذلك بسهولة.

نظرية 5.5.1: بنفس الرموز والفرضيات السابقة، يكون:

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

البرهان: بالاستقراء بحسب n . إذا كان $n = 2$ ، فإن التطبيق:

$$f: M_1 \times M_2 \cong M_1/N_1 \times M_2/N_2$$

المعرف بالعلاقة $f(m_1, m_2) = (m_1 + N_1, m_2 + N_2)$ هو هومومورفيزم مودولات
غامر. ولكن:

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2) = 0\} \\ &= \{(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 : (m_1 + N_1, m_2 + N_2) = (N_1, N_2)\} \\ &= \{(m_1, m_2) : m_1 \in N_1, m_2 \in N_2\} \\ &= N_1 \times N_2 \end{aligned}$$

إذا،

$$M/N \cong M_1/N_1 \times \cdots \times M_n/N_n$$

□ إذا كان $n > 2$ ، فإن المطلوب ينتج بالاستقراء.

إذا كانت M_n, \dots, M_1 مودولات جزئية في R - مودول M ، فإن

$M_1 \times \cdots \times M_n \cong M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ وفق التماثل $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ الذي

يُعرف إيزومرفيزماً بين هذين المودولين، وفي هذه الحالة تأخذ النظرية 5.5.1 الصيغة

التالية:

النظرية 5.5.1: لتكن M_n, \dots, M_1 مودولات جزئية في R - مودول M ،

و N_i مودول جزئي في M_i من أجل كل $i = 1, 2, \dots, n$ ، عندئذ:

$$\frac{M_1 \otimes \dots \otimes M_n}{N_1 \otimes \dots \otimes N_n} \cong \frac{M_1}{N_1} \otimes \dots \otimes \frac{M_n}{N_n}$$

البرهان: يشبه برهان النظرية 5.5.1.

□

1 - 6 المجموع المباشر والجداء المباشر

نظراً لأهمية المجموع المباشر والجداء المباشر للمودولات نفرده له بنداً خاصاً.

تعريف 1.6.1: لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R - مودولات. نسمي جداءً مباشراً

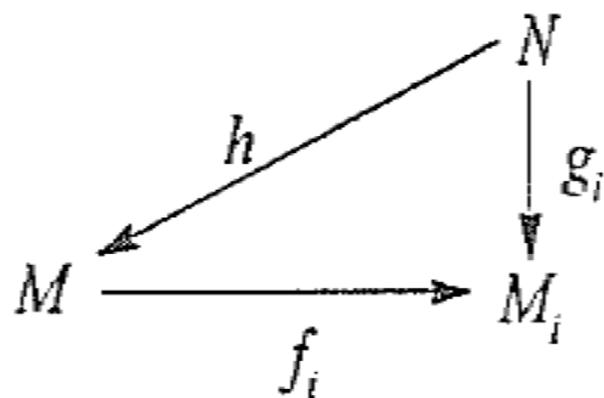
للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ، الثنائية $(M, (f_i)_{i \in I})$ ، حيث M - مودول R و $(f_i)_{i \in I}$ أسرة R -

هومومورفيزمات $f_i: M \rightarrow M_i$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N - مودولاً،

و $(g_i)_{i \in I}$ أسرة R - هومومورفيزمات $g_i: N \rightarrow M_i$ ، فإنه يوجد R هومومورفيزم وحيد

$h: N \rightarrow M$ ، بحيث يكون $f_i \circ h = g_i$ من أجل كل i ، أي بحيث يكون المخطط التالي

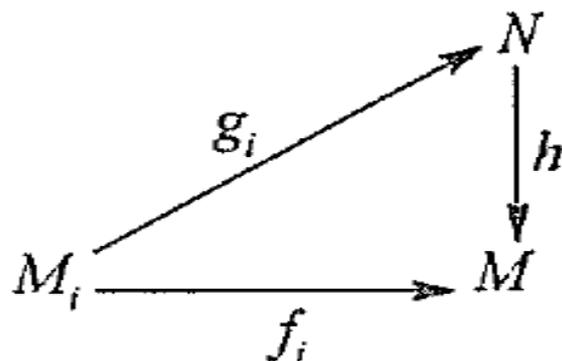
تبدلياً:



والمفهوم المعاكس (المزدوج، المثنوي لـ) الجداء المباشر هو المجموع المباشر. وهاكم التعريف.

تعريف 2.6.1: لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R - مودولات. نسمي مجموعاً مباشراً (جداً معاكساً، مثنوياً، مزدوجاً) للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ، الثنائية $(M, (f_i)_{i \in I})$ ، المؤلف من R - مودول M وأسرة R - هومومورفيزمات $(f_i)_{i \in I}$ حيث $f_i: M_i \rightarrow M$ تحقق الشرط الآتي: إذا كان N - مودولاً و $(g_i)_{i \in I}$ أسرة R - هومومورفيزمات

فإنه يوجد R - هومومرفيزم وحيد $h: M \rightarrow N$ بحيث يكون $g_i: M_i \rightarrow N$ ، $h \circ f_i = g_i$ من أجل كل i ، أي بحيث يكون المخطط التالي تبديلياً:



في تعريف الجداء المباشر والمجموع المباشر يُقال إن الهومومرفيزم h مولد بالأسرة $(g_i)_{i \in I}$.

بعد هذين التعريفين، تبرز أسئلة من الشكل: هل يوجد الجداء المباشر للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ؟ وإذا وجد، فهل هو وحيد؟ ما شكل هذا الجداء، أي ما شكل عناصره؟ الأسئلة نفسها تبرز بالنسبة إلى المجموع المباشر.

نبدأ بالفرضية الآتية:

فرضية 3.6.1: لتكن $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R - مودولات:

1. إذا كان $(M, (f_i)_{i \in I})$ جداء مباشراً للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن f_i إبيمورفيزم.
2. إذا كان $(M, (f_i)_{i \in I})$ مجموعاً مباشراً للأسرة $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن f_i مونومرفيزم.

البرهان:

1. من أجل كل $I \ni i$ نأخذ $M_i = M$ و $\text{id}_{M_i} = g_j$ و $g_j = 0$ إذا كان $i \neq j$ في

التعريف 1.6.1. عندئذ، من العلاقة $f_i \circ h = \text{id}_{M_i}$ نستنتج أن f_i إبيمورفيزم.

2. من أجل كل $I \ni i$ نأخذ $M_i = M$ و $\text{id}_{M_i} = g_j$ و $g_j = 0$ إذا كان $i \neq j$ ،

عندئذ من العلاقة $h \circ f_i = \text{id}_{M_i}$ نجد أن f_i مونومورفيزم. \square

ننتقل الآن إلى برهان وجود الجداء المباشر لأسرة R - مودولات $(M_i)_{i \in I}$.

نذكر أنه إذا كانت $(X_i)_{i \in I}$ أسرة مجموعات مزيلة (مفرقة) بالمجموعة I ، فإن

مجموعة الجداء المباشر $\prod_{i \in I} X_i$ هي بالتعريف مجموعة كل التطبيقات:

$$f: I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

حيث $X_i \ni f(i)$ من أجل كل i . وبشكل عملي مألوف نكتب x_i بدلا من $f(i)$ ونركز لـ f بالرمز $(x_i)_{i \in I}$. إذا، $\prod_{i \in I} X_i$ تتألف من تلك الأسز $(x_i)_{i \in I}$ من العناصر من $\prod_{i \in I} X_i$ حيث $X_i \ni x_i$ من أجل كل $i \in I$.

إذا أعطينا أسرة R - مودولات $(M_i)_{i \in I}$ ، فإن الجداء $\prod_{i \in I} M_i$ يمكن تحويله إلى مودول R (يمكن إعطاؤه R - بنية مودولية) بطريقة بسيطة وسهلة، وذلك بتعريف قانوني تشكيل كما يلي:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I} \quad (1)$$

$$\lambda (x_i)_{i \in I} = (\lambda x_i)_{i \in I} \quad (2)$$

سوف نرمز لهذا المودول المبني بهذا الشكل بالرمز $\prod_{i \in I} M_i$ ، وندعوه الجداء المباشر (الكارتيزي) للأسرة $(M_i)_{i \in I}$.

من أجل كل $i \in I$ نعرف التطبيق (حيث نكتب $\prod M_i$ بدلاً من $\prod_{i \in I} M_i$)

للسهولة):

$$p_j : \prod M_i \longrightarrow M_j$$

بالعلاقة:

$$p_j(m_i)_{i \in I} = m_j$$

وتسمى p_j إسقاطاً طبيعياً أو قانونياً على الحد أو المركبة M_j ، بسهولة نجد أن كل P_j هو R - إبيمورفيزم.

نظرية 4.6.1: من أجل كل أسرة R مودولات $(M_i)_{i \in I}$ تكون الثنائية

$(\prod M_i, (p_i))$ جداءً مباشراً لهذه الأسرة.

البرهان: ليكن N - R مودولاً كيفياً، و $(g_i)_{i \in I}$ أسرة R - هومومورفيزمات

$g_i : N \rightarrow M_i$ من أجل كل $i \in I$. نعرف التطبيق:

$$h: N \longrightarrow \prod M_i$$

كما يلي: من أجل كل $N \ni x$ نأخذ المركبة i في $f(x)$ بأنها $(f(x))_i = g_i(x)$.
وبعبارة أخرى نعرف h بالعلاقة التالية:

$$h(x) = (g_i(x))_{i \in I}, \quad \forall x \in N$$

عندئذ، من السهل برهان أن h هو R - هومومرفيزم مودولات، و $p_i \circ h = g_i$ من أجل كل $i \in I$.

ولبرهان وحدانية h نأخذ R - هومومرفيزماً آخر:

$$k: N \longrightarrow \prod M_i$$

حيث $p_i \circ k = g_i$ من أجل كل $i \in I$. عندئذ،

$$k(x)_i = g_i(x) = h(x)_i, \quad \forall x \in N$$

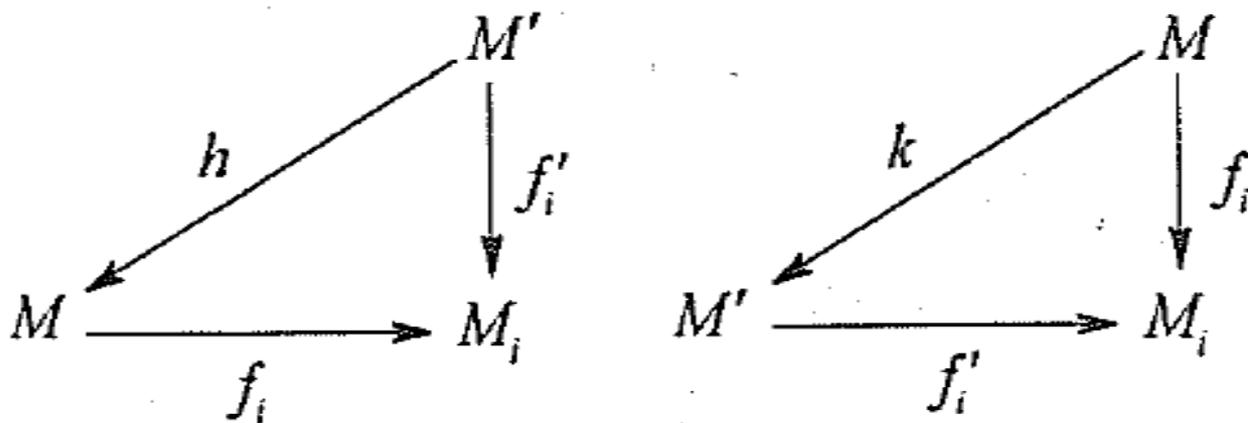
وينتج من ذلك أن $h = k$.

لنبرهن الآن وحدانية الجداء.

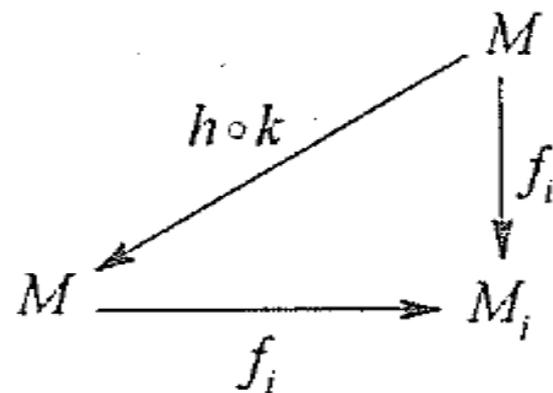
□

نظرية 5.6.1: ليكن $(M, (f_i))$ جداءً مباشراً للأسرة (M_i) ، عندئذ،
 $(M', (f'_i))$ جداء آخر لـ (M_i) \Leftrightarrow يوجد R -إيزومورفيزم وحيد $h: M' \rightarrow M$ ،
 بحيث يكون $f_i \circ h = f'_i$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان: بحسب تعريف الجداء المباشر للأسرة (M_i) يوجد R -هومومورفيزم
 وحيد $h: M' \rightarrow M$ و R -هومومورفيزم وحيد $k: M \rightarrow M'$ ، بحيث يكون المخططان:



تبدليين. وعندئذ يكون $f_i \circ h \circ k = f'_i \circ k = f_i$ والمخطط:



تبديلي من أجل كل $I \ni i$. ولكن بحسب تعريف الجداء، يوجد R - هومومرفيزم واحد فقط يجعل المخطط الأخير تبدلياً من أجل كل $I \ni i$. ومن الواضح أن id_{M_i} يحقق ذلك. وهذا يعني أن $h \circ k = \text{id}_{M_i}$. وبطريقة مشابهة نجد أن $k \circ h = \text{id}_M$ ، إذاً h هو R - ايزومرفيزم و $h^{-1} = k$.

بالعكس، لنفترض أن h هو R - ايزومرفيزم. عندئذ، بما أن $f_i = f'_i \circ h^{-1}$ من أجل كل $I \ni i$ فإننا نستطيع استخدام أن $(M_i, (f_i))$ جداء لبناء، من أجل كل R - مودول N وكل أسرة R - هومومرفيزمات (g_i) حيث $g_i: N \rightarrow M_i$ ، المخطط: