

جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر
كتاب البنى الجبرية ٣
(المودولات)
د. محمد حسن الهوشي
منشورات جامعة تشرين
سوريا

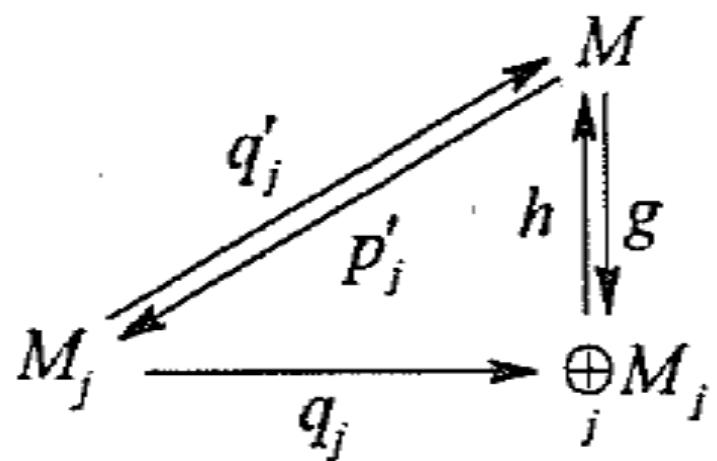
المحاضرة السابعة

في المودولات

عندئذ، بحسب النظرية 9.6.1 يوجد R - هومومورفизм:

$$h: \bigoplus_j M_j \rightarrow M$$

حيث يكون $h \circ q_j = q'_j$. ومن المخطط:



ومن أجل كل $M \in m$ ، نجد:

$$\begin{aligned}
 (h \circ g)(m) &= h(g(m)) = \sum_j h \circ q_j \circ p'_j(m) \\
 &= \sum_j (q_j \circ p'_j)(m) = m
 \end{aligned}$$

و $h \circ g$ هو التطبيق المطابق على M . وإذا كان $x \in \bigoplus_j M_j$ ، فإن:

$$\begin{aligned}
 (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = \sum (q_j \circ p'_j)(h(x)) = \\
 &= \sum_j \sum_k (q_j \circ p'_j \circ h \circ q_k \circ p_k)(x) \\
 &= \sum_j (q_j \circ p_k)(x) \\
 &= x
 \end{aligned} \tag{1}$$

بحسب (1)

إذا، $g \circ h$ هو التطبيق المطابق على $\bigoplus_j M_j$. وينتظر مما سبق أن h و g هما R - إيزومرفيزمان أحدهما نظير الآخر. والآن بتطبيق النظرية 10.6.1 نجد أن $((M_i, (q'_i))$ هو جداء معاكس للأسرة $(M_i)_{i \in I}$. \square

ملاحظة (1): إذا كانت $I = \{1, \dots, n\}$ فإن العلاقة (2) في نص النظرية 13.6.1، تأخذ الشكل التالي:

$$\sum_{i=1}^n q'_i \circ P'_i = \text{id}_M$$

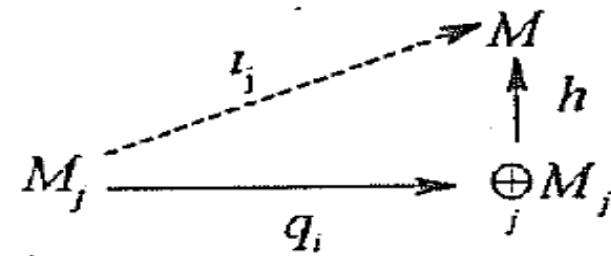
ملاحظة (2): هناك بالطبع خواص هامة ومفيدة تعطي جداء أسرة R - مودولات (M_i) هوية مميزة مثوية لتلك التي تعطيها النظرية 13.6.1، للجداء المعاكس ونصلها كما يلي:

يكون R - مودول M بالإضافة إلى الأسرة (P'_j) من R - هومومرفيزمات $p'_j : M_j \rightarrow M$ جداء للأسرة (M_i) \Leftrightarrow توجد أسرة R - هومومرفيزمات $q'_j : M_j \rightarrow M$ بحيث يكون:

$$\left. \begin{array}{ll} j = k & \text{إذا كان } id_{M_j} \\ j \neq k & \text{إذا كان } 0 \end{array} \right\} = p'_k \circ q'_j \quad (1)$$

(2) من أجل كل $(x_j \in \prod_j M_j)$ يوجد عنصر وحيد $x \in M$ بحيث يكون $x_j = p'_j(x)$ من أجل كل $j \in I$.

في كل ما سبق كانت مودولات الأسرة (M_i) مودولات كييفية، قد تكون عناصر بعضها من طبيعة مختلفة عن طبيعة عناصر أخرى. فيما يلي ندرس الحالة الهامة الآتية التي تكون فيها عناصر الأسرة (M_i) جميعها مودولات جزئية في R - مودول M . في هذه الحالة نأخذ الإدخال (الإحوااء، تطبيق الاحتواء) الطبيعي $M_j \rightarrow M$ و $\oplus M_j \rightarrow h$: الهومومورفزم الوحد الذي يجعل المخطط:



تبديلياً من أجل كل $j \in I$. من برهان النظرية 9.6.1، نعلم أن h معطى بالعلاقة:

$$h(m_j) = \sum_j t_j(m_j) = \sum_j m_j$$

إذًا، $\text{Im}(h)$ هو المدول الجزئي $\sum_j M_j$ في M المولد بـ R , وهذا يسمح لنا بإعطاء التعريف الآتي:

تعريف 14.6.1: لیکن RM - مدول، و $(M_i)_{i \in I}$ أسرة R - مدولات جزئية في M . نقول إن M هو المجموع المباشر الداخلي للأسرة (M_i) إذا كان التطبيق $h: \bigoplus_i M_i \rightarrow M$ المعروف أعلاه إيزومorfizماً.

نوجز خواص المجموع المباشر للأسرة الممدولات الجزئية $(M_i)_{i \in I}$ بالنظرية الآتية.

نظريّة 15.6.1: لِيُكَن $R M$ - مُودولُّاً، و (M_i) أسرة R - مُودولات جزئية في

M عندئذ:

(a) M مجموع مباشر للأسرة $(M_i) \Leftrightarrow$ كل عنصر $x \in M$ يمثّل بـشكلٍ وحيد

بالشكل $x = \sum_i m_i$ حيث $\exists x_i \in M_i$ من أجل كل $i \in I$ ، و $m_i = 0$ ما عدا من

أجل عدد محدود منها.

(b) إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) المجموع $\sum_i M_i$ هو مجموع مباشر للأسرة.

(2) إذا كان $\sum_i m_i = 0$ ، فإن $m_i = 0$ من أجل كل i .

(3) $\sum_{j:j \neq i} M_j \cap \sum_{j:j \neq i} M_j = \{0\}$.

البرهان:

(a) بالتعريف M مجموع مباشر للأسرة (M_i) $\Leftrightarrow h \in \text{Im}(h) = \sum_i M_i$ (غامر + متباين). إن h غامر \Leftrightarrow يمكن التعبير عن كل $M \ni x$ بالشكل $x = \sum_i m_i$, حيث $M_i \ni x_i$, من أجل كل $i \in I$ و $m_i = 0$, ما عدا عدد محدود منها. وبما أن $h((m_i)) = \sum_i m_i$ فإن h متباين \Leftrightarrow تكون هذه التعبيرات وحيدة.

(b) \Leftarrow (2): بحسب (a) يعبر عن 0 كمجموع، بطريقة وحيدة وهي التافهة:

$$0 = 0 + \dots + 0 + \dots$$

ليكن $M_i \cap \left(\sum_j M_j \right) \ni x$, ولتكن:

$$x = m_i = \sum_{j \neq i} m_j$$

عندئذ نحصل على المساواة:

$$-m_i + \sum_{j \neq i} m_j = 0$$

وبحسب (2), $m_i = 0$ و $x = 0$.

\Leftarrow (3): لنفترض أن $M_i \ni m_i, m'_i$, حيث $\sum_i m_i = \sum_i m'_i$ من أجل كل i . عندئذ:

$$m_i - n_i = \sum_{j \neq i} (n_j - m_j)$$

حيث الطرف الأيسر من هذه العلاقة من M_i ، في حين أن الطرف الأيمن هو من $\sum_{i=j} M_j$. وبحسب (3) يكون $m_j = n_j$ أو $m_j - n_j = 0$ من أجل كل j . والآن، بحسب \square يكون (1) محققا.

نتيجة 16.6.1: لیکن M_1 و M_2 مودولین جزئیین في R - مودول M . عندئذ $M_1 \cap M_2 = \langle 0 \rangle$ ، و $M = M_1 + M_2 \Leftrightarrow M = M_1 \oplus M_2$.

\square البرهان: واضح.

نتيجة 17.6.1: إذا كان $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ، فان $M = M_i \oplus (\bigoplus_{j \neq i} M_j)$

البرهان: من النظرية 15.6.1، (b) نجد أن:

$$\sum_{j \neq i} M_j = \bigoplus_{j \neq i} M_j$$

\square وعندئذ، يصبح المطلوب نتيجة مباشرة للنتيجة 16.6.1.

ملاحظة: إذا كان $M = M_1 \oplus M_2$ ، فإننا نقول إن M_1 ينتمي M_2 أو M_2 ينتمي M_1 . إذا كان $M \subseteq N$ مودولاً جزئياً، فإننا نقول إن N حد مباشر في M إذا وجد مودول جزئي P في M حيث $M = P \oplus N$ ، أي بحيث يكون N و P متنامين. وهنا يجب أن نلاحظ أنه ليس من الضروري وجود متنام لكل مودول جزئي N في R -مودول M . مثلاً، إذا كان $\exists q, p \in \mathbb{Z}$ حيث $q, p \neq 0, 1$ ، فإن $p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} \neq \langle 0 \rangle$ ، ولما كان كل مودول جزئي في \mathbb{Z} هو من الشكل $n\mathbb{Z}$ من أجل n ما في \mathbb{Z} ، فإن $p\mathbb{Z} (p \neq 0, 1)$ ليس من الضروري أن يكون وحيداً. مثلاً، إذا أخذنا الفراغ الشعاعي \mathbb{R}^2 (فوق \mathbb{R}) والفراغات الجزئية:

$$Z = \{(r, r) : r \in \mathbb{R}\} \text{ و } Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \text{ و } X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

فكل عنصر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ يمكن كتابة بالشكل:

$$(x, y) = (x, x) + (y, y - x) = (y, y) + (x - y, 0)$$

وبالتالي، نجد أن: $\mathbb{R}^2 = Z \oplus X = Z \oplus Y$ ومع ذلك، فإن متمم مودول جزئي لـ Z ومرافقان كما يتبع مما يلي.

نظريّة 18.6.1: ليكن M_1 و M_2 مودولين جزئيين متكاملين في M . عندئذ $(M_1 \cong M/M_2)$ و $M_2 \cong M/M_1$.

البرهان: إن الإسقاط الطبيعي $p_2: M \rightarrow M_2$ المعرف بالعلاقة $p_2(m_1 + m_2) = m_2$ هو R -هومومورفزم غامر، نوائه هي M_1 ، إذًا

□ ~

$$M / \text{Ker } p_2 = M / M_1 \cong p_2(M) = M_2$$

1 - 7 المودول الحر

في هذا البند نعطي تعريف المودول الحر لأخذ فكرة بسيطة عن هذا المفهوم بالقدر الذي يلزمنا في الفصول التالية إلى أن نصل إلى الفصل المخصص لهذا النوع من المودولات.

تعريف 1.7.1: لتكن R حلقة و M - مودولاً. تسمى المجموعة الجزئية $X \subseteq M$ مرتبطة خطياً فوق R إذا وجدت عناصر مختلفة x_1, \dots, x_n من X وعناصر a_1, \dots, a_n من R ليست جميعها أصفاراً و $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ إذا لم تكن X مرتبطة خطياً، فإنها تسمى مستقلة خطياً.

تعريف 2.7.1: ل يكن R - مودولاً و $X \subseteq M$ مجموعة جزئية، تسمى X قاعدة لـ M إذا كانت:

$$M = \langle X \rangle : M \text{ تولد } X \quad (1)$$

X مستقلة خطياً. (2)

تعريف 3.7.1: يسمى R - مودول M حرًا إذا كان له قاعدة. وبعبارة أخرى، المودول الحر هو كل مودول له قاعدة. وإذا كانت X قاعدة للمودول M ، فإن $|X|$ يسمى رنک M ويرمز له بالرمز $\text{rank}(M)$ أو بالرمز $\mu(M)$ ، أي أن:

$$\mu(M) = \text{rank}(M) = |X|$$

إذا كان $|X| < \infty$ ، فإننا نقول أن M منتهي الرنک، أو إن M مودول حر ذو رنک محدود، وإلا (أي إذا كان $|X| = \infty$) فإن M يسمى مودولاً حرًا ذا رنک لانهائي.

بحسب النظرية 15.6.1، القول إن $X = (x_i)_{i \in I}$ قاعدة لـ M مكافئ القول إن M مجموع مباشر لأسرة المودولات الجزئية في M ، $(Rx_i)_{i \in I}$ حيث حيث $\langle 0 \rangle = \text{Ann}(x_i)$ من أجل كل $i \in I$ ، علماً أن:

$$\text{Ann}(x) = \{r \in R : rx = 0\}$$

أضف إلى ذلك أن $M = \bigoplus_{i \in I} R_i$ هو R - مودول حر، قاعدته هي $X = (e_i)_{i \in I}$ ، حيث $R_i = R$ و $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$. وفي هذه الحالة نقول إن M حر على المجموعة I . وإذا كان $f: R^n \rightarrow M$ - مودولاً حرًا رنکه n ، فإن $M \cong R^n$ حسب الإيزومورفيزم المعرف بالعلاقة:

$$f(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i x_i$$

حيث (x_1, \dots, x_n) قاعدة لـ M إن ما يهمنا هو النظرية الآتية والتي ستلزمنا في الفصل القادم (انظر النظرية .(4.3.2).

ليكن $f: M \rightarrow M'$ هو مومورفيزم R - مودولات. نرمز بـ N_f لنواة f وبـ R_f لصورة f ، أي أن $N_f = \text{Ker}(f)$ و $R_f = \text{Im}(f)$. يسمى العدد $\text{rank}(N_f)$ درجة انعدام f ويرمز له بالرمز $\text{null}(f)$ ، ويسمى العدد $\text{rank}(\text{Im}(f))$ رانك f ويرمز له بالرمز $\text{rank}(f)$.

نظريّة 4.7.1: ليكن $f: M \rightarrow M'$ هومومورفيزم R -مودولات حرّة، ليكن $n = \text{rank}(M)$

$$n = \text{null}(f) + \text{rank}(f)$$

البرهان: بحسب نظرية الإيزوهرفيزم الأولى، لدينا:

$$M/\text{Ker}(f) \stackrel{M}{\sim} N_f \cong \text{Im}(f) = R_f$$

لتكن $(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n)$ قاعدة لـ M ولتكن (x_1, \dots, x_m) قاعدة لـ N_f و $F \cong R_f$ عندئذ، من أجل كل عنصر $x \in M$ لدينا $x = \sum_i a_i x_i$ و

$$x = \left(x - \sum_{i=m+1}^n a_i x_i \right) + \sum_{i=m+1}^n a_i x_i \in N_f + F$$

$$\cdot N_f \ni x - \sum_{i=m+1}^n a_i x_i \quad \text{لأن}$$

m

n

إذاً، $M = N_f + F$. لیکن $N_f \cap F \ni x$ ، عندذاك:

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m - a_{m+1}x_{m+1} - \cdots - a_nx_n = 0$$

و $a_i \neq 0$ من أجل كل i لأن (x_1, \dots, x_n) قاعدة لـ M . إذاً:

$$\begin{aligned} n &= \text{rank}(M) = (n-m) + m = \text{rank}(F) + \text{rank}(N_f), \\ &= \text{rank}(R_f) + \text{rank}(N_f) \\ &= \text{null}(f) + \text{rank}(f) \end{aligned}$$

□

كما هو مقرر.

فرضية 5.7.1: كل R - مودول M هو عامل مودول حر F ، وإذا كان M منتهي التوليد، فإنه عامل R - مودول حر منتهي التوليد، ويمكنناأخذ $\mu(F) = \mu(M)$.

البرهان: لتكن $X = (x_i)_{i \in I}$ مجموعة مولدة لـ M ولتكن $f: F \rightarrow M$ المدول الحر على مجموعة الألة I . نعرف الهمومرفزم $R = R_i$ بالعلاقة:

$$f((a_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} a_i x_i$$

بما أن X تولد M , فإن f غامر, وبالتالي $F/\ker(f) \cong M$. نلاحظ أنه إذا كانت $|X| > \infty$, فإن F منتهي التوليد, كما أن $\mu(F) \geq \mu(M)$. لكن F حر على I , وبالتالي $\mu(F) \geq |I|$, وبما أن I تفرق مجموعة مولدات M , فإنه ينتج أن $\mu(M) \geq \mu(F)$ إذا كانت X مجموعة صغرى مولدة لـ M . لذلك يمكننا أن نأخذ $\mu(F) = \mu(M)$.

□