جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة التاسعة

في المودولات

2 – 3 مصفوفة الواحدة والمصفوفات الأولية

لتكن R حلقة بواحدة 1. يوجد mn مصفوفة $M_{m,n}(R) \ni E_{ij}$ هامة جداً في كثير من الحسابات المتعلقة بالمصفوفات. نعرف E_{ij} بالعلاقة:

$$\mathrm{ent}_{kl}(E_{ij}) = \delta_{ki}\delta_{lj}$$

أي أن E_{ij} هي $m \times n$ – مصفوفة، جميع عناصرها معدومة ماعدا العنصر الواقع في المكان (i, j) فهو 1.

ملاحظة: إن الرمز E_{ij} لا يحوي أية إشارة تدل على المجموعة $M_{m,n}(R)$ التي ينتمي إليها العنصر E_{ij}. إن ذلك يفهم من النص.

يوجد قانون جداء المصفوفات E_{ij} التالي (عندما يكون الجداء معدوم):

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

إذا كان $m = n$، فإن $E_{ii}^2 = E_{ii}$، وعندما $1 < n$، فإن $E_{11}E_{12} = E_{12}$، في حين أن $E_{12}E_{11} = 0$. لذلك، إذا كان $1 < n$، فإن الحلقة $M_n(R)$ غير تبديلية، وتوجد فيها قواسم الصفر. تسمى المصفوفة E_{ij} مصفوفة واحدة، لكنها ليس واحدة في الحلقة $M_n(R)$ ما لم يكن $n = 1$. إن واحدات الحلقة $M_n(R)$ هي المصفوفات غير الشاذة (القلوبة). تسمى مجموعة المصفوفات القلوبة في $M_n(R)$ الزمرة الخطية من الدرجة n ويرمز لها بالرمز $GL_n(R)$ أو بالرمز $GL(n,R)$.

إن الفرضية الآتية تعطينا خواص المصفوفة E_{ij}.

فرضية 1.3.2: لتكن $(E_{ij}:1\le i,j\le n)$ أسرة مصفوفات واحدات في $M_n(R)$ و $M_n(R)\ni A=\left[a_{ij}\right]$، عندئذ:

(1) $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$؛

(2) $I_n=\sum_{i=1}^{n}E_{ii}$؛

(3) $A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ij}=\sum_{i=1}^{n}E_{ij}a_{ij}$؛

(4) $E_{ii}AE_{kl}=a_{jk}E_{il}$.

البرهان: تمرين. □

ملاحظة: عندما نتكلم عن مصفوفات واحدات نعني بشكل عام المصفوفات $M_n(R) \ni E_{ij}$. ومع ذلك، من أجل m و n توجد مجموعة مصفوفات واحدات $\{E_{ij}\}$، $m \geq i \geq 1$ و $n \geq j \geq 1$، حيث E_{ij} تحوي 1 في المكان (i,j) وصفر في الأمكنة الأخرى، عندئذ، تكون $\{E_{ij}\}$، $m \geq i \geq 1$ و $n \geq j \geq 1$، قاعدة للمودول $M_{m,n}(R)$ فوق R، وذلك باعتباره R – مودولاً يسارياً و R – مودولاً يمينياً في آن واحد.

لقد وجدنا أن $M_n(R)$ حلقة. لنعين مركز هذه الحلقة. نذكر أن، المصفوفة السلمية A هي مصفوفة من الشكل $A = a\mathrm{I}_n$. إن مجموعة المصفوفات السلمية في $M_n(R)$ تشكل حلقة جزئية في $M_n(R)$، والتقابل $a \mapsto a\mathrm{I}_n$ يُعرّف إيزومرفيزماً من R في $M_n(R)$. إذا كان $C(R)$ مركز R، فإن:

$$(a\mathrm{I}_n)A = A(a\mathrm{I}_n)$$

من أجل كل $a \in C(R)$ وكل $A \in M_n(R)$. ليكن $v: R \to M_n(R)$ مُعرّفاً بالعلاقة

$v(a) = a\mathrm{I}_n$.

إن الفرضية الآتية صحيحة.

فرضية 2.3.2: إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن:

$$C(M_n(R)) = v(C(R))$$

فرضية 2.3.2: إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإن:

$$C(M_n(R)) = \nu(C(R))$$

أي أن مركز $M_n(R)$ هو مجموعة المصفوفات السلمية، حيث هذه السلميات مأخوذة من مركز R.

البرهان: من الواضح أن $C(M_n(R)) \supseteq \nu(C(R))$. ليكن الآن $A \in C(M_n(R))$ و $n \geq i \geq 1$. عندئذ، $AE_{1i} = E_{1i}A$ وبحسب النظرية 1.2.2، (5) و (6) يكون:

$$(AE_{1i})^k = A(E_{1i})^k = \delta_{ik}A^1$$

$$(E_{1i}A)_k = (E_{1i})_k A = \delta_{1k}A_i$$

وبمقارنة محتويات هذه الأزواج من المصفوفات (عددها n) نجد أن $a_{js}=0$ إذا كان $s \neq j$ و $a_{11}=a_{jj}$. وبما أن j كيفي فإن $A=aI_n$ مصفوفة سلمية. بما أن A يجب أن تكون متبادلة مع جميع المصفوفات السلمية، فإنه ينتج أن $C(R) \ni a_{11}$. □

فيما يلي نُعرّف أنواعاً خاصة من المصفوفات في $M_n(R)$، وهي التالية، وللتذكير نثبتها جميعاً:

(1) المصفوفات الأولية E_{ij}.

(2) المصفوفات القطرية $D_n(R)$، حيث:

$$D_n(R)=\{A \in M_n(R):\ \mathrm{ent}_{ij}(A)=0,\ i \neq j\}$$

إذا للمصفوفة القطرية A الشكل $A=\sum_{i=1}^{n} a_i E_{ii}$ بدلالة مصفوفات الواحدة E_{ij}.

يستعمل أيضاً الرمز $A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ للدلالة على المصفوفة القطرية A. نلاحظ الصيغة الآتية لجداء مصفوفتين قطريتين:

$$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=$$
$$=\mathrm{diag}(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n)$$

(3) المصفوفات السلمية $A=aI_n$ ، $R\ni a$.

(4) المصفوفات المثلثية من الأعلى:

$$T^{u}(R)=\{A\in M_n(R):\ \mathrm{ent}_{ij}(A)=0,\ i>j\}$$

(5) المصفوفات المثلثية من الأسفل:

$$T_n(R)=\{A\in M_n(R):\ \ \mathrm{ent}_{ij}(A)=0,\ i<j\}$$

(6) من أجل $R\ni\alpha\neq 0$ و $j\neq i$ ، نعرف:

$$T_{ij}(\alpha)=I_n+\alpha E_{ij}$$

أي أن $T_{ij}(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان (i,j) حيث عنصر $T_{ij}(\alpha)$ في هذا المكان هو α، بينما هو 0 في I_n.

(7) من أجل كل $R^*\ni\alpha$ (α واحدة في R) و $n\geq i\geq 1$، نعرف:

$$D_i(\alpha)=I_n-E_{ii}+\alpha E_{ii}=I_n+(\alpha-1)E_{ii}$$

أي أن $D_i(\alpha)$ تختلف عن I_n فقط في المكان $(i,\ i)$ حيث محتوى $D_i(\alpha)$ في هذا المكان هو α، بينما محتوى I_n هو 1. يمكن كتابة $D_i(\alpha)$ أيضا بالشكل $D_i(\alpha)=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\alpha,1,\cdots,1)$.

(8) مصفوفة تبديل:

$$P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

أي أن P_{ij} تنتج من المصفوفة I_n بالمبادلة بين السطرين i و j (أو بين العمودين i و j). تسمى المصفوفات $D_i(\alpha)$، $T_{ij}(\alpha)$ و P_{ij} مصفوفات أولية فوق R.

بالإضافة إلى هذه الأنواع الخاصة من المصفوفات في $M_n(R)$، والهامة جداً لما لها من فوائد في الحسابات هناك مصفوفة من الشكل:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

غير أولية، حيث $\begin{bmatrix} u & s \\ v & t \end{bmatrix}$ هي 2×2 – مصفوفة غير شاذة فوق R.

ربما يساعد المثال الآتي في توضيح الأنواع المختلفة الثلاثة من المصفوفات الأولية:

مثال 3.3.2: نفترض أن $n = 3$ و $\alpha \in R^*$. عندئذ:

$$T_{13}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن الفرضية الآتية تعطي بعض الخواص الأساسية للمصفوفات الأولية.

فرضية 4.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1:

(1) إذا كان $R \ni \alpha, \beta$ و $j \neq i$ ، فإن $T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha+\beta)$.

(2) إذا كان $R \ni \alpha$ و $j \neq i$ ، فإن $T_{ij}(\alpha)$ قلوبة:

$$(T_{ij}(\alpha))^{-1} = T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) إذا كان $R^* \ni \beta$ و $1 \leq i \leq n$ ، فإن $D_i(\beta)$ قلوبة، و

$$(D_i(\beta))^{-1} = D_i(\beta)^{-1} = D_i(\beta^{-1})$$

(4) إن $I_n = P_{ij}^2$ ، وبالتالي P_{ij} قلوبة وتساوي مقلوبها.

البرهان:

(1) من تعريف $T_{ij}(\alpha)$ ومن تعريف جداء المصفوفات لدينا:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\alpha)T_{ij}(\beta) &= (I+\alpha E_{ij})(I+\beta E_{ij}) \\ &= I+(\alpha+\beta)E_{ij} \\ &= T_{ij}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

لأن $E_{ij}^2 = 0$ إذا كان $j \neq i$.

(2) من (1)، بأخذ $\beta = -\alpha$ نجد:

$$T_{ij}(\alpha)T_{ij}(-\alpha) = T_{ij}(0) \Rightarrow T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

(3) من قانون جداء مصفوفتين قطريتين نجد:

$$\begin{aligned} D_i(\beta)D_i(\beta^{-1}) &= \mathrm{diag}(1,\cdots,\beta,\cdots,1)\mathrm{diag}(1,\cdots,\beta^{-1},\cdots,1) \\ &= \mathrm{diag}(1,\cdots,\beta\beta^{-1},\cdots,1) \\ &= \mathrm{diag}(1,\cdots,1,\cdots,1) \\ &= I_n \end{aligned}$$

(4) لدينا:

$$\begin{aligned} P_{ij}^2 &= (I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})^2 \\ &= I_n + (\text{مجموع حدود معدومة}) = I_n \end{aligned}$$

بحسب تعريف جداء المصفوفات وخواص E_{ij}. □

يلزمنا التعريفان الآتيان.

تعريف 5.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $A \in M_m(R)$. نُعرّف الجداء بـــ A من اليسار بالتابع:

$$L_A : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$$

حيث $L_A(B) = AB$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$. وإذا كانت $A \in M_n(R)$، فإننا نُعرّف الجداء بـــ A من اليمين بالتابع:

$$R_A : M_{m,n}(R) \to M_{m,n}(R)$$

حيث $R_A(B) = BA$ من أجل كل $B \in M_{m,n}(R)$.

من هذين التعريفين نجد بسهولة أن L_A هو $M_n(R)$ – هومومرفيزم مودولات يمنى، بينما R_A هو $M_m(R)$ – هومومرفيزم مودولات يسرى.

فرضية 6.3.2: لتكن R حلقة بواحدة 1، و $A \in M_{m,n}(R)$. عندئذ:

(1) $L_{P_{ij}}(A) = P_{ij}A$ $[R_{P_{ij}}(A) = AP_{ij}]$ هي المصفوفة الناتجة من A بالمبادلة بين السطرين (العمودين) i و j.

(2) إذا كان $\alpha \in R^*$ (α واحدة في R)، فإن $L_{D_{ij}(\alpha)}(A) = D_{ij}(\alpha)A$، $R_{D_{ij}(\alpha)}(A) = AD_{ij}(\alpha)$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر (العمود) i بـ α.

(3) إذا كان $\alpha \in R$، فإن $L_{T_{ij}(\alpha)}(A) = T_{ij}(\alpha)(A)$ $[R_{T_{ij}(\alpha)}(A) = AT_{ij}(\alpha)]$ هي المصفوفة الناتجة من A بضربي السطر (العمود) j بـ α وإضافته إلى السطر (العمود) i.