جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة العاشرة

في المودولات

البرهان:

(1) لدينا:

$$P_{ij}A=(I-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji})A= \\ =A-E_{ii}A-E_{jj}A+E_{ij}A+E_{ji}A \qquad (*)$$

نلاحظ أن:

(a) $E_{ii}A$ هي المصفوفة التي سطرها i هو نفس السطر i للمصفوفة A، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

(b) $E_{ij}A$ هي المصفوفة التي سطرها i هو السطر j في المصفوفة A، وكل الأسطر الأخرى مساوية للصفر.

إذاً، (*) تبين أن $P_{ij}A$ هي المصفوفة الناتجة من A بالمبادلة بين السطرين i و j.

(2) لدينا:

$$D_i(\alpha)A=(I-E_{ii}+\alpha E_{ii})A \\ =A-E_{ii}A+\alpha E_{ii}A$$

بما أن:

$$E_{ii}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdots\cdots a_{in} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{السطر } i$$

فإن $D_i(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر i بـــ α.

(3) لدينا:

$$T_{ij}(\alpha)A = (I + \alpha E_{ij})A$$

بما أن:

$$E_{ij}A = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{j1} \cdots\cdots a_{jn} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{السطر } i$$

فإن $T_{ij}(\alpha)A$ هي المصفوفة الناتجة من A بضرب السطر j بـــ α وإضافته إلى السطر i. □

2 – 4العمليات الأولية على المصفوفات

تعريف 1.4.2: لتكن $A \in M_{m,n}(R)$. تسمى الأنماط (الأنواع، النماذج) الثلاثة من العمليات عمليات أولية سطرية (عمودية) أو عمليات أولية على الأسطر (الأعمدة):

(1) المبادلة بين سطرين (عمودين). نرمز بـــ $R_i \leftrightarrow R_j$ $(C_i \leftrightarrow C_j)$ لعملية المبادلة بين السطرين (العمودين) i و j.

(2) جداء عناصر سطر (عمود) ما بعنصر مختلف عن الصفر من R. نرمز بـــ αR_i (αC_i) لعملية جداء السطر (العمود) i بـــ α.

(3) جداء عناصر سطر (عمود) ما بـــ $\alpha \in R$ وإضافتها إلى العناصر المقابلة في سطر (عمود) آخر مختلف. نرمز بـــ $R_i + \alpha R_j$ $(C_i + \alpha C_j)$ لعملية إضافة

نظرية 3.4.2: لتكن R ساحة إبديالات رئيسة و $A \in M_{m,n}(R)$. عندئذ، A مكافئة إلى مصفوفة قطرية من الشكل:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & & & & 0 \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $a_i \neq 0$ و $a_1 | a_2 | \cdots | a_r$.

البرهان: من أجل كل $a \in R$ نعرف الطول $l(a)$ للعنصر a بأنه عدد العوامل البسيطة الموجودة في تحليل a، $a = p_1 \cdots p_r$، حيث p_i عناصر بسيطة في R، ليس من الضروري أن تكون مختلفة. نأخذ بالتعريف $l(u) = 0$ إذا كان u واحدة في R.

إذا كانت $A = 0$ فلا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك نفرض أن $A \neq 0$. ليكن a_{ij} عنصراً من عناصر A طوله $l(a_{ij})$ أصغري بين أطوال عناصر A. بتطبيق العمليات الأولية على أسطر A وعلى أعمدتها يأخذ هذا العنصر المكان $(1, 1)$. لذلك نستطيع أن نفرض أن العنصر المختلف عن الصفر وذا الطول الأصغر من عناصر A هو العنصر الواقع في المكان $(1,1)$. لنفرض أن $a_{11} \nmid a_{1k}$. بمبادلة العمود الثاني مع العمود k نستطيع أن نفرض أن $a_{11} \nmid a_{12}$. ليكن $d = (a_{11}, a_{21}) = g.c.d.(a_{11}, a_{12})$. عندئذ $l(a_{11}) > l(d)$. يوجد العنصران $R \ni v, u$ بحيث يكون $d = ua_{11} + va_{12}$، ويوجد $R \ni t, s$ بحيث يكون $a_{11} = ds$ و $a_2 = dt$. إذا، $d = d(us + vt)$، وبالتالي، $1 = us + vt$. يمكن التحقق من أن:

$$\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & t \\ v & -u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

والتي تعني أن المصفوفة $\begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix}$ قلوبة. بضربي A من اليمين بالمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u & t \\ v & -s \end{bmatrix} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على مصفوفة سطرها الأول هو:

$$\begin{bmatrix} d & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \end{bmatrix}$$

حيث $l(a_{11}) > l(d)$.

إذا كان a_{11}/a_{12} فإنه بإجراء العملية السطرية (العمودية) الأولية (3) على العمودين الأول والثاني (أو، بشكل مكافئ بضرب A من اليمين بمصفوفة أولية مناسبة)، نستطيع إرجاع A إلى مصفوفة سطرها الأول أيضاً من الشكل

$[d \quad 0 \quad b_{13} \quad \cdots \quad b_{1n}]$، حيث $l(a_{11}) > l(d)$.

بالاستمرار بالعمل بهذا الشكل نحصل على مصفوفة مكافئة إلى A، جميع عناصر سطرها الأول 0 ماعدا محتوى المكان (1,1).

وبالمثل، بإجراء العمليات السطرية الأولية (1) – (3) والعملية غير السطرية بالضرب من اليسار بمصفوفة من النوع (9) نرجع عناصرالعمود الأول بعد المكان (1,1) إلى 0، وإما أن تبقى عناصر السطر الأول دون تغيير [أي كلها تساوي 0 ما عدا في المكان (1,1)]، أو ترجع طول محتوى المكان (1,1). في الحالة الثانية نعيد العملية التي أرجعنا بها عناصر السطر الأول بعد المكان (1,1) إلى 0. بما أن $l(a_{11})$ محدود فهذه العمليات (الإرجاعات المتناوبة للسطر الأول وللعمود الأول) يجب أن تأتي إلى نهاية. وعندما يتم ذلك، نكون قد أرجعنا A إلى الشكل:

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_1 هي $(m-1)\times(n-1)$ – مصفوفة، P_1 هي $m\times m$ – مصفوفة، Q_1 هي $n\times n$ – مصفوفة، و P_1 و Q_1 قلوبتان.

وبالمثل توجد مصفوفتان قلوبتان P_1' و Q_1' من القياس $(m-1)\times(m-1)$ و $(n-1)\times(n-1)$، على الترتيب، بحيث يكون:

$$P_2'A_1Q_2'=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

حيث A_2 مصفوفة من القياس $(m-2)\times(n-2)$. لتكن:

$$Q_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2' \end{bmatrix} \text{ و } P_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2' \end{bmatrix}$$

$$P_2P_1AQ_1Q_2=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

بالاستمرار بهذا الشكل (أو بالاستقراء بحسب $m+n$)، نحصل على:

$$PAQ=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,\cdots,0)$$

وأخيراً، نبين أننا نستطيع إرجاع A إلى أكثر من ذلك، بحيث يكون $a_1|a_2|\cdots|a_r$. لنفرض أن $a_1 \nmid a_2$. بإضافة السطر الثاني إلى السطر الأول يصبح السطر الأول بالشكل: $[a_1,a_2,0,\cdots,0]$، بعد ذلك نستطيع إرجاع طول a_1. إذا، بإرجاعات أخرى، نستطيع فرض أن $a_1|a_2$. بالمثل $a_1|a_i$، $i=3,\cdots,r$. بتكرار هذا العمل من أجل a_2 بدلا من a_1، .... وهكذا، نصل أخيراً إلى حالة يكون فيها $a_i|a_{i+1}$، $i=1,\cdots,r-1$. □

تعريف 4.4.2: تسمى العناصر القطرية غير المعدومة للمصفوفة التي لها الشكل القطري المعطى في النظرية 3.4، العوامل اللامتغيرة للمصفوفة A.

يمكن بيان أن العوامل اللامتغيرة معينة بشكل وحيد بإهمال الجداء بواحدات، وأن $m \times n$ – مصفوفتين متكافئتان عندما وفقط عندما يكون لهما العوامل اللامتغيرة ذاتها. لن نناقش هذه المسألة الآن. قد نناقشها مستقبلاً.

2 – 5 تجزئة مصفوفة

في هذا البند ندرس مفهوم تجزئة مصفوفة إلى مصفوفات جزئية (من قياس أصغر من قياس المصفوفة الأساسية). وهو تقنية تفيد في التحقق من بعض الخواص، التي لا يمكن التحقق منها عند أخذ جميع محتويات المصفوفة. لذلك نفرض أن

$A \in M_{m,n}(R)$، إذا كان $m = m_1 + \cdots + m_r$ و $n = n_1 + \cdots + n_s$. عندئذ، يمكن النظر إلى A كـ $r \times s$ – مصفوفة جزئية (وحدات، بلوكات):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

حيث A_{ij} هي $m_i \times n_j$ – مصفوفة فوق R.

هناك تجزئتان هامتان للمصفوفة A:

الأولى، وهي تجزئة A بدلالة الأسطر:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

حيث $A_i \in M_{1,n}(R)$، والثانية، وهي تجزئة A بدلالة الأعمدة:

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & \cdots & A^n \end{bmatrix}$$

حيث $A^j \in M_{m,1}(R)$.

لندرس الآن جداء مصفوفتين مجزأتين. لذلك نفرض أن:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

مصفوفتان مجزأتان. والسؤال: هل يمكن حساب الجداء $C = AB$ لمصفوفة مجزأة، $C = [C_{ij}]$ حيث $A_{ik}B_{kj}$؟ والجواب نعم. بفرض جميع الجداءات معرفة. في الحقيقة، القسمان (5) و (6) من النظرية 1.2، هما حالة خاصة لهذا النوع من الجداء، لأن التجزئة نتجت عن تجزئة الأسطر والأعمدة. وبشكل خاص فإن المساواة $(AB)_i = A_iB$ من النظرية 1.2.2، (5) تترجم بلغة جداء المصفوفات المجزأة إلى:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_m B \end{bmatrix}$$

بينما المساواة $(AB)^j = AB^j$ من نفس النظرية [القسم (6)] فتترجم بلغة جداء المصفوفات إلى:

$$AB = A\begin{bmatrix} B^1 & \cdots & B^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB^1 & \cdots & AB^r \end{bmatrix}$$

بالنسبة إلى جداء مصفوفات مجزأة، في الحالة العامة، توجد القاعدة العامة الآتية.

فرضية 1.5.2: لتكن $A \in M_{m,n}(R)$ و $B \in M_{n,p}(R)$. نفرض أن $m = m_1 + \cdots + m_s$، $n = n_1 + \cdots + n_t$ و $p = p_1 + \cdots + p_u$، ولنفرض أن $A = [A_{ij}]$ و $B = [B_{ij}]$ مجزأتان بحيث يكون $A_{ij} \in M_{m_i, n_j}(R)$، بينما $B_{ij} \in M_{n_i, p_i}(R)$. عندئذ، تتجزأ المصفوفة $C = AB$ بالشكل $C = [C_{ij}]$ حيث $C_{ij} \in M_{m_i, p_i}(R)$، و

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{t} A_{ik} B_{kj}$$

البرهان: ليكن $1 \le \alpha \le m$، و $1 \le \beta \le p$. عندئذ:

$$c_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \qquad (1)$$

في تجزئة C المعطاة بـ $m = m_1 + \cdots + m_s$ و $p = p_1 + \cdots + p_u$، لدينا $c_{\alpha\beta} = \mathrm{ent}_{\alpha\beta}(C)$ في المصفوفة الجزئية $C_{ij} \in M_{m_i, p_j}(R)$، وبالتالي، $c_{\alpha\beta} = \mathrm{ent}_{\omega\tau}(C_{ij})$ حيث $1 \le \omega \le m_i$ و $1 \le \tau \le p_i$. إذاً، لدينا تجزئة لـ A_α و B^β بالشكل:

$$A_\alpha = \left[(A_{i1})_\omega \quad \cdots \quad (A_{it})_\omega \right]$$

و

$$B^{\beta} = \begin{bmatrix} (B_{1j})^{\tau} \\ \vdots \\ (B_{tj})^{\tau} \end{bmatrix}$$

من المعادلة (1) نستنتج أن:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ent}_{\omega\tau}(C_{ij}) &= \mathrm{ent}_{\alpha\beta}(C) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \\
&= \sum_{\gamma=1}^{n_1} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} + \cdots \sum_{\gamma=1}^{n_t} a_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} \\
&= \mathrm{ent}_{\omega\tau}(A_{i1} B_{1j}) + \cdots + \mathrm{ent}_{\omega\tau}(A_{it} B_{tj})
\end{aligned}$$

وبذلك يتم برهان المطلوب. □