# جامعة الانبار

## كلية التربية للعلوم الصرفة

## قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

## مقرر : مودولات ( مقاسات )

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

( المودولات )

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

# المحاضرة الحادية عشر

# في المودولات

# الفصل الثالث

# التمو اليات الصحيحة

من جملة المصفوفات المجزأة والمفيدة بشكل خاص هي مجموعة المصفوفات التي قطرها بلوكات أو وحدات (أي المصفوفات البلوكية القطرية). وهاكم التعريف:

يُقال إن المصفوفة المجزأة:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}$$

بلوكية القطر (قطرها بلوكات، وحدات) إذا كان $r=s$، وإذا كان $A_{ij}=0$ كلما كان $i \neq j$. المصفوفات $A_{ii}$ هي بلوكات قطرية، لكن البلوكات $A_{ii}$ يمكن أن تكون من أي قياس. وبشكل عام، سوف نرمز للبلوكات القطرية برموز ذات دليل واحد $A_i$. إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}$$

مصفوفة بلوكية القطر، فإننا نقول إن $A$ هي المجموع المباشر للمصفوفات $A_1, A_2, \cdots, A_r$، ونرمز لهذا المجموع المباشر بالرمز:

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r = \oplus_{i=1}^{r} A_i$$

إذاً، إذا كانت $M_{m_i,n_i}(R) \ni A_i$ فإن $A_1 \oplus \cdots \oplus A_r \in M_{m,n}(R)$، حيث $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ و $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$.

إن الفرضية الآتية تعطي بعض النتائج المباشرة المتعلقة بجبر المجموع المباشر للمصفوفات.

**فرضية 2.5.2:** لتكن $R$ حلقة، ولتكن $A_1,\cdots,A_r$ و $B_1,\cdots,B_r$ مصفوفات فوق R من قياسات مناسبة. عندئذ:

(1) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i)+(\oplus_{i=1}^{r} B_i)=\oplus_{i=1}^{r}(A_i+B_i)$،

(2) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i)(\oplus_{i=1}^{r} B_i)=\oplus_{i=1}^{r}(A_iB_i)$،

(3) $(\oplus_{i=1}^{r} A_i)^{-1}=\oplus_{i=1}^{r} A_i^{-1}$ إذا كانت $A_i \in GL(n_i,R)$،

(4) $\mathrm{Tr}(\oplus_{i=1}^{r} A_i)=\Sigma_{i=1}^{r}\mathrm{Tr}(A_i)$ إذا كانت $A_i \in M_{n_i}(R)$.

البرهان: تمرين للقارئ. □

## 2 – 6 الجداء التنسوري للمصفوفات

إن مفهوم تجزأة مصفوفة مناسب جداً لتوصيف وبرهان العديد من خواص الجداء التنسوري (جداء كرنيكر) للمصفوفات.

لنبدأ بالتعريف.

**تعريف 1.6.2:** لتكن $R$ حلقة تبديلية، وليكن $A \in M_{m_1,n_1}(R)$ و $B \in M_{m_2,n_2}(R)$. نُعرّف الجداء التنسوري (ويُسمى جداء كرنيكر) لـ $A$ و $B$ ونرمز له بالرمز $A \otimes B \in M_{m_1m_2,n_1n_2}(R)$، بأنه المصفوفة المجزأة:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m_1 1} & \cdots & C_{m_1 n_1} \end{bmatrix}$$

حيث كل بلوك (وحدة) $C_{ij} \in M_{m_2,n_2}(R)$ معرفة بـــ:

$$C_{ij} = (ent_{ij}(A))B = a_{ij}B$$

وبالتالي:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n_1}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n_2}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1}B & a_{m_1 2}B & \cdots & a_{m_1 n_1}B \end{bmatrix}$$

هناك إمكانية أخرى لتعريف الجداء التنسوري $A\otimes B$. إن $A\otimes B$ هو المصفوفة المجزئة:

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n_2} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m_2 1} & \cdots & D_{m_2 n_2} \end{bmatrix}$$

حيث كل بلوك (وحدة) $D_{ij} \in M_{m_1,n_1}(R)$ مُعرّف بالعلاقة:

$$D_{ij}=A(\mathrm{ent}_{ij}(B))=Ab_{ij}$$

أي أن:

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n_2} \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ab_{m_2 1} & Ab_{m_2 2} & \cdots & Ab_{m_2 n_2} \end{bmatrix}$$

هناك جداء آخر للمصفوفتين $A$ و $B$، يسمى جداء هادامارد (Hadamard) أو جداء شور (Schur). هذا الجداء مُعرّف عندما تكون المصفوفتان من حجم واحد.

**تعريف 2.6.2:** لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين من حجم واحد. نعرف جداء هادمارد أو جداء شور للمصفوفتين $A$ و $B$، ونرمز له بالرمز $A \circ B$، بأنه $C = A \circ B$، حيث $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$، أي أن:

$$A \circ B = \left[ a_{ij} b_{ij} \right]$$

## أمثلة 3.6.2:

(1) إذا كان $X = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ و $Y = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ من $R^n$، فإن:

$$X \otimes Y = {}^t(x_1y_1, \cdots, x_1y_n, \cdots, x_ny_1, \cdots, x_ny_n)$$

$$X \circ Y = {}^t(x_1y_1, \cdots, x_ny_n)$$

(2) $I_m \otimes I_n = I_{mn}$ ، $I_n \circ I_n = I_n$ ، $I_m \otimes B = \oplus_{i=1}^{m} B$ ، $I_n \circ B = B$

(3) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

إن الفرضية الآتية تنتج مباشرة من الفرضية 1.5.

فرضية 4.6.2: لتكن $R$ حلقة تبديلية، ولتكن $A_1 \in M_{n_1,n_1}(R)$ و $A_2 \in M_{n_1,n_1}(R)$، $B_1 \in M_{m_1,m_2}(R)$ و $B_2 \in M_{m_2,m_2}(R)$، عندئذ:

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2 \otimes B_1 B_2)$$

البرهان: بحسب الفرضية 1.5، البلوك (الوحدة) $C_{ij}$ في المكان $(i,j)$ من $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$ يعطى بالعلاقة:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} (\mathrm{ent}_{ik}(A_1)B_1)(\mathrm{ent}_{kj}(A_2)B_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} (\mathrm{ent}_{ik}(A_1))(\mathrm{ent}_{kj}(A_2))B_1B_2$$

وهو البلوك الواقع في المكان $(i,j)$ من الجداء $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)$. □

**نتيجة 5.6.2:** لتكن $R$ حلقــة تبديليــة، لتكن $A \in M_m(R)$ و $B \in M_n(R)$.

عندئذ:

$$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$$

البرهان: ينتج مباشرة من الفرضية 4.6. □

**فرضية 6.6.2:** لتكن $R$ حلقــة تبديليــة، لتكن $A \in M_m(R)$ و $B \in M_n(R)$.

عندئذ:

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$$

البرهان بالحساب المباشر. □

## 3 – 1 تمهيد

إن مفهوم المتوالية الصحيحة من $R$ – مودولات و $R$ – هومومرفيزمات مودولات هو أداة هامة عند دراسة المودولات، وخصوصاً عند دراسة المجموع المباشر، والجداء المباشر، والجداء التنسوري للمودولات. وهذا المفهوم هو الأداة الأساسية في دراسة نظرية الهومولوجيا، ذلك العلم الذي هو من أهم الأساليب في دراسة المسائل الهامة والمعقدة في كثير من فروع الرياضيات.

إن مفهوم المتوالية الصحيحة في نظرية المودولات هو تعميم لمفهوم المتوالية الصحيحة في نظرية الزمر (انظر البنى الجبرية 1). قبل دراسة مفهوم المتوالية الصحيحة، ندرس مفهوم إتمام المخططات.

## 3 – 2 بناء المخططات التبديلية:

إن مفهوم تركيب التطبيقات يساعدنا في حل المسألة الآتية: نفرض أننا أعطينا المخطط الآتي، المؤلف من $R$ – مودولات و $R$ – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h?"] \\ C & \end{tikzcd}$$

يطرح السؤال الآتي: "تحت أي شروط يوجد $R$ – هومومرفيزمات مودولات $h$، بحيث يكون $h \circ f = g$؟ ويعبر عن هذه العلاقة الأخيرة بالعبارة "بحيث يكون المخطط السابق تبديليا". ونستطيع صياغة المسألة الثنوية (المزاوجة)، الناتجة من عكس اتجاه الأسهم كلها. وبعبارة أخرى، إذا أعطينا $R$ – مودولات و $R$ – هومومرفيزمات مودولات من الشكل:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, "h\,?"'] \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$