# جامعة الانبار

## كلية التربية للعلوم الصرفة

## قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

## مقرر : مودولات ( مقاسات )

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

( المودولات )

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

# المحاضرة الثانية عشر

## في المودولات

# الفصل الثالث

# التمو اليات الصحيحة

ما هي الشروط التي يجب تحققها حتى يوجد $R$ – هومومرفيزمات مودولات $h:C\to B$، بحيث يكون $f\circ h=g$؟.

دعونا نحل هاتين المسألتين عندما تكون $A$، $B$ و $C$ مجموعات؛ $f$ و $g$ هما تطبيقان. إن الحل هو في النظرية الآتية.

**نظرية 1.2.3:**

(أ) إذا كان لدينا المجموعات الثلاث $A$ و $B$ و $C$، والتطبيقان $f:A\to B$ و $g:A\to C$، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

(1) يوجد التطبيق $h:C\to B$ بحيث يكون $h\circ f=g$؛

(2) من كل أجل $A\ni x,y$، $g(x)=g(y)\Leftarrow f(x)=f(y)$؛

(ب) إذا كانت لدينا المجموعات الثلاث غير الخالية $A$، $B$ و $C$، والتطبيقان $f:A\to B$ و $g:A\to C$، فإن الشرطين الآتيين متكافئان:

(3) يوجد تطبيق $h:C\to B$، بحيث يكون $f\circ h=g$؛

(4) $\mathrm{Im}(f)\supseteq \mathrm{Im}(g)$.

البرهان:

(1) $\Leftarrow$ (2)، ليكن $A\ni x,y$ و $f(x)=f(y)$. عندئذ:

$$g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))=h(f(y))=(f\circ h)(y)=g(y)$$

$(2) \Leftarrow (1)$: نأخذ المجموعة $B \times C \supseteq \mathrm{Im}(f) \times C$. نتأمل المجموعة:

$$G := \{(y,z) : y = f(x),\ z = g(x)\}$$

إن $G \neq \phi$: من أجل كل $x \in A$ يكون $G \ni (f(x), g(x))$. من أجل كل $y \in \mathrm{Im}(f)$ يوجد عنصر وحيد $z \in C$. يكون $G \ni (y,z)$، إذا كان $f(x) = y$ نختار $g(x) = z$، ولبرهان وحدانية z، نفرض أن $G \ni (y,z)$ و $G \ni (y,z')$. بحسب تعريف G، لدينا، من أجل كل $x, x' \in A$:

$$y = f(x) = f(x')\ ,\ z = g(x)\ ,\ z' = g(x')$$

وبحسب (2)، $g(x) = g(x')$، وبالتالي $z = z'$. لذلك، نستطيع تعريف تطبيق $t : \mathrm{Im}(f) \to C$، بالعلاقة:

$$t(f(x)) = g(x),\quad \forall x \in A$$

نُعرّف الآن التطبيق $h: B \to C$ بالعلاقة:

$$\left.\begin{array}{r} t(y) \text{ إذا كان } y \in \mathrm{Im}(f) \\ \text{أي عنصر } c \in C \text{ فيما عـــدا ذلـــك} \end{array}\right\} = h(y)$$

عندئذ، من أجل كل $x \in A$، لدينا:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = t(f(y)) = g(x)$$

إذا، $f \circ h = g$

لنبرهن الآن تكافؤ (3) و (4).

(3) $\Leftarrow$ (4): ليكن $h: C \to B$، حيث $f \circ h = g$، عندئذ، من أجل كل $x \in C$، لدينا:

$$g(x) = (f \circ h)(x) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}(f)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

(4) $\Leftarrow$ (3): من أجل كل $x \in C$ يوجد $y_x \in B$، بحيث يكون $g(x) = f(y_x)$.

نُعرّف $h: C \to B$ بالعلاقة $h(x) = y_x$. إن التطبيق $h$ يحقق العلاقة:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(y_x) = g(x)$$

إذاً، $f \circ h = g$. □

**نتيجة 2.2.3:**

(أ) إذا كانت $A$ و $B$ مجموعتين غير خاليتين و $f: A \to B$ تطبيقاً ما، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) $f$ متباين (مونومرفيزم، إدخال)؛

(2) يوجد تطبيق $g: B \to A$ بحيث يكون $g \circ f = i_A$؛

(3) $f$ خزول من اليسار، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية $C$، وكل التطبيقات $h, k: C \to A$:

$$f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$$

(ب) إذا كانت $A$ و $B$ مجموعتين غير خاليتين و $f:A\to B$ تطبيقاً ما، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1') $f$ غامر (إبيمورفيزم)؛

(2') يوجد تطبيق $g:B\to A$ بحيث يكون $f\circ g=u_B$؛

(3') $f$ خزول من اليمين، أي أنه، من أجل كل مجموعة غير خالية وكل التطبيقات $h,k:B\to C$:

$$h\circ f=k\circ f\Rightarrow h=k$$

البرهان:

(1) ⇔ (2): ينتج مباشرة من (1) ⇔ (2) بأخذ $C = A$ و $g = i_A$.

(2) ⇐ (3): إذا كان $f \circ h = f \circ k$، عندئذ، بتركيب $g$ مع طرفي هذه العلاقة من اليسار، واستخدام العلاقة $g \circ f = u_A$ نجد أن $h = k$.

$(3) \Leftarrow (1)$: نفرض العكس، أي نفرض أن $f$ ليس متبايناً. عندئذ، من أجل $x,y \in A$ ما، $x \neq y$، يكون $f(x)=f(y)$. لتكن $C$ مجموعة كيفية غير خالية، وليكن $h,k:C \to A$ تطبيقين معينين معرفين بالعلاقتين $h(c)=x$ و $k(c)=y$ من أجل كل $c \in C$، عندئذ، من الواضح أن $h \neq k$ و:

$$f(h(c))=f(x)=f(y)=f(k(c)$$
$$\Rightarrow f \circ h = f \circ k$$

إذاً، إذا لم يتحقق الشرط (1) فإن الشرط (3) لا يتحقق أيضاً، وهذا يكافئ أن $(3) \Leftarrow (1)$.

$(1') \Leftrightarrow (2')$: ينتج مباشرة من تكافؤ (3) و (4) في النظرية 1.2.3.

$(2') \Leftrightarrow (3')$: إذا كان $h \circ f = k \circ f$، فإنه بتركيب $g$، من اليمين مع طرفي هذه العلاقة، واستخدام العلاقة $f \circ g = i_B$، نجد أن $h = k$.

$(3') \Leftrightarrow (1')$: إذا كانت $B$ وحيدة العنصر، فإن $f$ غامر بشكل آلي (أتوماتيكي) ولا شيء يحتاج إلى برهان. لذلك، نفرض أن B تحوي، على الأقل، عنصرين مختلفين $a$ و $b$. ليكن $h,k : B \to B$ مُعرفين بالشكل:

$$\left.\begin{array}{ll} x & \text{إذا كان } \mathrm{Im}(f) \ni x \\ a & \text{فيما عدا ذلك} \end{array}\right\} = h(x) \quad ; \quad \left.\begin{array}{ll} x & \text{إذا كان } \mathrm{Im}(f) \ni x \\ b & \text{فيما عدا ذلك} \end{array}\right\} = k(x)$$

عندئذ، من أجل كل $y \in A$، يكون:

$$h(f(y)) = f(y) = k(f(y)) \Rightarrow h \circ f = k \circ f$$

وبتطبيق $(3^1)$ نجد أن $h = k$.

إذا كان الآن $\mathrm{Im}(f) \subsetneq B$، فإنه يوجد $x \in B$ و $x \notin \mathrm{Im}(f)$. من أجل هكذا عنصر نحصل، عندئذ، على $h(x) = a$ و $k(x) = b$، وبما أن $h = k$، فإن $a = b$. وهذا تناقض. إذاً، $\mathrm{Im}(f) = B$ و $f$ غامر. $\square$

ربما يتوقع أحدنا أن النظرية 1.2.3 ونتيجتها يمكن تطبيقهما في نظرية المودولات بعد استبدال عبارة "مجموعة غير خالية" بعبارة "$R$ – مودول و "التطبيق" بـــ "$R$ – هومومرفيزم مودولات". لكن المثالين المتعاكسين الآتيين يبينان أن هذا التوقع في غير محله.

**مثال 2.2.3: (معاكس):** لنتأمل مخطط $\mathbb{Z}$ – مودولات و $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "id_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, "\times z"'] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

حيث $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ التطبيق المتجانس، و $\times z$ هو $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزم مُعرّف بالعلاقة $n \mapsto 2n$. على الرغم من أنه، بحسب النظرية 1.2.3، يوجد هومومرفيزم $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$، حيث $h\circ(\times z)=i_{\mathbb{Z}}$، فإنه لا يوجد مثل هذا الهومومرفيزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هذا الهومومرفيزم $h$، فإنه من أجل كل $\mathbb{Z}\ni n$ يجب أن يكون $n=h(2n)=2h(n)$، وبشكل خاص، إذا كان $n=1$، فإن $1=2h(1)$. هذا مستحيل، لأن المعادلة $2x=1$ ليس لها حل في $\mathbb{Z}$.

مثال 4.2.3 (معاكس): من أجل كل عدد بسيط $p$، نتأمل الزمرة الجزئية $\mathbb{Q}_p$ في $\mathbb{Q}$ المعطاة بالشكل:

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : x = k/p^n \right\}$$

نلاحظ أن $\mathbb{Z}$ زمرة جزئية في $\mathbb{Q}_p$، وبالتالي، نستطيع أخذ عامل الزمرة $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

لنتأمل الآن مخطط $\mathbb{Z}$ – مودولات و $\mathbb{Z}$ – هومومرفيزمات مودولات:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \arrow[d, "id"] \\ \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \arrow[r, "f"'] & \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

حيث id هو تطبيق المطابق، و $f$ هو $\mathbb{Z}$ − هومومرفيزم مودولات، مُعرّف بالعلاقة $x \mapsto px$. بما أنه من أجل كل $k$ وكل $n$، لدينا $kp^{-n}+\mathbb{Z}=kp^{-n-1}+\mathbb{Z}$، فإننا نجد أن $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}=\mathrm{Im}(id)$. بحسب النظرية 1.2.3 (ب) يوجد تطبيق $h:\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ بحيث يكون $f\circ h=id$. ومع ذلك، لا يوجد مثل هكذا $\mathbb{Z}$ − هومومرفيزم. لأنه، إذا فرضنا وجود مثل هكذا $\mathbb{Z}$ − هومومرفيزم $h$، يجب أن نحصل على:

$$
\begin{aligned}
p^{-1}+\mathbb{Z} &= f(h(p^{-1}+\mathbb{Z})) = p(h(p^{-1}+\mathbb{Z})) \\
&= h(p(p^{-1}+\mathbb{Z})) = h(0+\mathbb{Z}) = 0+\mathbb{Z} \\
&\Rightarrow p^{-1} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

وهذا مستحيل.

بالرغم من المثالين المعاكسين السابقين هناك بعض الحالات تُعطى فيها شروط إضافية، نحصل على ما يشبه النظرية 1.2.3 بالنسبة إلى المودولات. إن النتيجتين الآتيتين تشيران إلى هذه الوضعية. وسوف نرى حالات أخرى مؤخراً.

**نظرية 5.2.3:** لنتأمل المخطط:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & C \\
B &
\end{tikzcd}
$$

المؤلف من $R$ – مودولات و $R$ – هومومرفيزمات مودولات، حيث $f$ غامر (إيبمورفيزم). إن الفرضيتين الآتيتين متكافئتان:

(1) يوجد $R$ – هومومرفيزم وحيد $h: B \to C$، بحيث يكون $h \circ f = g$.

(2) $\mathrm{Ker}(g) \supseteq \mathrm{Ker}(f)$.

أضف إلى ذلك، أن مثل هكذا $R$ – هومومرفيزم $h$ يكون مونومرفيزما عندما وفقط عندما يكون $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): إذا تحقق (1)، فإنه بحسب النظرية 1.2.2 (أ)، من أجل كل $x \in A$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = o_B &\Rightarrow g(x) = h(f(x)) = h(o_B) = o_C \\ &\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g) \\ &\Rightarrow \text{الشرط } (2) \end{aligned}$$

(2) $\Leftarrow$ (1): من أجل كل $A \ni x, y$ لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x) - f(y) = f(x-y) = o_B \\ &\Rightarrow x - y \in \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g) \\ &\Rightarrow g(x-y) = g(x) - g(y) = o_C \\ &\Rightarrow g(x) = g(y) \end{aligned}$$

بحسب النظرية 1.2.3 (أ)، نستطيع تعريف التطبيق $h: B \to C$ بحيث يكون $h \circ f = g$.

بما أن $f$ غامر، بالفرض، فإنه ينتج بحسب النتيجة 3.2.3، أن $f$ خزول من اليمين، وبالتالي، $h$ وحيد. بقي أن نبرهن أن $h$ هو في الحقيقة $R$ – هومومرفيزم.

من أجل كل $A \ni x$، لدينا $h(f(x)) = g(x)$، وبالتالي، إذا أعطينا $A \ni x, y$ و $R \ni \lambda$، لدينا، كون $f$ و $g$ هما $R$ – هومومرفيزمي مودولات:

$$\begin{aligned} h(f(x)+f(y)) &= h(f(x+y)) = (h \circ f)(x+y) \\ &= g(x+y) = g(x)+g(y) \\ &= (h \circ f)(x)+(h \circ f)(y) \\ &= h(f(x))+h(f(y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\lambda(f(x))) &= h(f(\lambda x)) = (h \circ f)(\lambda x) = g(\lambda x) \\ &= \lambda g(x) = \lambda (h \circ f)(x) \\ &= \lambda (h(f(x))) \end{aligned}$$

بما أن $f$ غامر، فإنه ينتج مباشرة أن $h$ هو $R$ – هومومرفيزم.

وأخيراً، إذا كان $h$ مونومرفيزما، من أجل كل $x \in A$ لدينا:

$$h(f(x)) = g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

وبالتـــالي، $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathrm{Ker}(g)$. إذا، $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$،

بالعكس، إذا كـــان $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$، ليكن $x \in \mathrm{Ker}(h)$، بما أن $f$ غامر،

فإن $f(y) = x$، $y \in A$، وبالتالي:

$$0 = h(x) = h(f(y)) = g(y) \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow$ $h$ متباين $\square$