جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الرابعة عشر

في المودولات

نظرية 6.3.3: ليكن $f:M\to M'$ R – هومومرفيزم مودولات. إذا كان $i:\ker(f)\to M$ تطبيق احتواء (إدخالاً)، فإن:

(1) $f\circ i=0$؛

(2) إذا كان P R – مودولا و $g:P\to M$ R – هومومرفيزماً، حيث $f\circ g=0$، فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $\theta:P\to \mathrm{Ker}(f)$ يَجعل المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "g"] & \\
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "f"] & M'
\end{tikzcd}$$

البرهان: (1) واضح جداً. (2) ينتج مباشرة من النظرية 5.3.1. □

لإعطاء القارئ فكرة أعمق عن المخططات التبديلية ندرس الحالات الآتية.

فرضية 7.3.3: إذا كان المخطط:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\beta"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

لمؤلف من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، تبديلياً، وسطراه متواليتان صحيحتان قصيرتان، فإن:

(1) α و γ متباينان $\Leftarrow$ β متباين؛

(2) α و γ غامران $\Leftarrow$ β غامر؛

(3) α و γ إيزومرفيزما $\Leftarrow$ β إيزومرفيزم؛

البرهان:

(1) ليكن $\mathrm{Ker}(\beta) \ni x$. بما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$(\gamma \circ s) = (v \circ \beta)(x) = v(\beta(x)) = v(0) = 0$$

$$\Rightarrow s(x) = 0 \quad (\text{لأن } \gamma \text{ متباين})$$
$$\Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(s) = \mathrm{Im}(t)$$

إذا، يوجد $M' \ni x'$ بحيث يكون $t(x') = x$. وبما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$(u \circ \alpha)(x') = u(\alpha(x')) = (\beta \circ t)(x') = \beta(t(x')) = \beta(x) = 0$$

ولكن السطر السفلي متوالية صحيحة (u متباين)، فإن $\alpha(x') = 0$. ولكن α متباين، وبالتالي $x' = 0$ و $x = t(x') = 0$ ، و β متباين.

(2) ليكن $L \ni y$. عندئذ، $L'' \ni v(y)$ ، وبما أن γ غامر، فإن $v(y) = \gamma(x'')$ ، $M'' \ni x''$ و $s(x) = x''$ لأن s غامر. وبما أن المخطط تبديلي، فإن:

$$v(\beta(x)) = (v \circ \beta)(x) = (\gamma \circ s)(x) = \gamma(s(x))$$
$$= \gamma(x'') = v(y)$$
$$\Rightarrow v(\beta(x) - y) = 0$$
$$\Rightarrow \beta(x) - y \in \mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$$

ليكن $u(y')=\beta(x)-y$ ، $L'\ni y'$. وبما أن α غامر، فإن $y'=\alpha(x')$ ، $M'\ni x'$.

إذا:

$$\begin{aligned}\beta(x)-y=u(y')=u(\alpha(x'))&=(u\circ\alpha)(x')\\&=(\beta\circ t)(x')=\beta(t(x'))\\\Rightarrow y&=\beta(x-t(x'))\end{aligned}$$

إذاً، β غامر.

(3) ينتج مباشرة من (1) و (2). □

لنأخذ الآن الحالة الخاصة: $M'=L'$ و $M''=L''$. عندئذ نحصل على المخطط الآتي:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "t"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "s"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & L \arrow[r, "v"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

فإذا كان هذا المخطط تبديليا، فإن β إيزومرفيزم دائما. وإذا كان السطر السفلي في هذا المخطط من الشكل:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M' \oplus M' \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

فإننا نقول إن المتوالية:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

مكافئة إلى المجموع المباشر أو إيزومرفية إلى المجموع المباشر.

3 – 4 المتواليات المنشطرة:

لتكن المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

إن صحة هذه المتوالية تعني أن f متباين، g غامر و $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

تعريف 1.4.3: تسمى المتوالية (1) منشطرة إذا كان:

$$\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$$

حداً مباشراً في M.

مثال 2.4.3: ليكن p و q عددين بسيطين مختلفين. عندئذ، تكون المتواليتان القصيرتان:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_q \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

صحيحتين حيث $\mathbb{Z}_{pq} \ni \alpha(m) = qm$ و $\mathbb{Z}_{p^2} \ni f(m) = pm$، و β و g الهومومرفيزمان الطبيعيان (الإسقاطان الطبيعيان). إن المتوالية (2) تنشطر، في حين أن (3) لا تنشطر. إن التحقق من ذلك ينتج بكل سهولة من الزمر الدورية مع ملاحظة أن $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{Z}$ – مودول.

إن النظرية الآتية تعطي رائزاً أو مقياساً لمعرفة ما إذا كانت متوالية قصيرة صحيحة تنشطر أو لا.

نظرية 3.4.3: إذا كانت المتوالية القصيرة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (4)$$

المؤلفة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، صحيحة، فإن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) يوجد هومومرفيزم $\alpha : M \to M_1$، بحيث يكون $\alpha \circ f = i_{M_1}$؛

(2) يوجد هومومرفيزم $\beta : M_2 \to M$، بحيث يكون $g \circ \beta = i_{M_2}$؛

(3) المتوالية (4) منشطرة و:

$$\begin{aligned} M &\cong \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha) \\ &\cong \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta) \\ &\cong M_1 \oplus M_2 \end{aligned}$$

وفي كل هذه الحالات يُقال إن الهومومرفيزمين α و β يُشطران المتوالية الصحيحة (4)، أو هما شاطران لها، الأول، α من اليسار، والثاني، β من اليمين.

البرهان: نفرض أن (1) محقق، وليكن $x \in M$. عندئذ:

$$\begin{aligned} \alpha(x - f(\alpha(x)) &= \alpha(x) - (\alpha \circ f)(\alpha(x)) = \alpha(x) - i_{M_1}(\alpha(x)) \\ &= \alpha(x) - \alpha(x) = 0 \\ &\Rightarrow x - f(\alpha(x)) \in Ker(\alpha) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(\alpha)$$
$$\Rightarrow M = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(\alpha)$$

وإذا كان $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$ ، فإن $\mathrm{Im}(f) \ni f(x_1) = x$ و $M_1 \ni x_1$. عندئذ:

$$x_1 = i_{M_1}(x_1) = (\alpha \circ f)(x_1) = \alpha(f(x_1)) = \alpha(x) = 0$$

لأن $\mathrm{Ker}(\alpha) \ni x$. إذا $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha)$.

نعرف $\beta : M_2 \to M$ بالعلاقة:

$$\beta(x_2) = x - f(\alpha(x)) \text{ حيث } g(x) = x_2$$

بما أن g غامر، فإنه يوجد مثل هذا العنصر $x \in M$، ولكن من الممكن كتابة $g(x) = x_2$ من أجل أكثر من اختيار واحد لـــ x. لذلك يجب التأكد من أن β معرف جيدا. نفرض أن $g(x) = x_2 = g(x')$. عندئذ، $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \ni x - x'$، وبالتالي:

$$(x - f(\alpha(x)) - (x' - f(\alpha(x')) = (x - x') + (f(\alpha(x') - f(\alpha(x))$$
$$\in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$$
$$= \{0\}$$

وينتج من ذلك أن β مُعرّف جيداً. بما أنه من الواضح من تعريف β أن $g \circ f = i_{M_2}$، نكون قد برهنا أن (1) $\Leftarrow$ (2) وأن (3) مُحقق.

إن البرهان أن (1) $\Leftarrow$ (2) و (3) مشابهة لما سبق، ونتركه للقارئ كتمرين.

لنفرض أخيراً أن (3) محقق، أي أن $M = M_1 \oplus M_2$. عندئذ، الإسقاط $\alpha : M \to M_1$ يحقق $\alpha \circ f = i_{M_1}$، والإدخال $\beta : M_2 \to M$ يحقق $g \circ f = i_{M_2}$، وبالتالي (1) و (2) مُحققان. □

3 – 15 المتواليات الصحيحة و Hom

ليكن M و M' – R – مودولين. عندئذ، تكون المجموعة $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ زمرة تبديلية بالنسبة إلى عملية جمع التطبيقات (انظر المثال 8.3.1). وإذا كانت الحلقة R تبديلية فإن $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ تكون R – مودولاً.

نذكر أن $\mathrm{End}_R(M)=\mathrm{Hom}_R(M,M)$ ترمز إلى مجموعة الإندومرفيزمات على M. إن $\mathrm{End}_R(M)$ هي حلقة، حيث عملية الجداء في هذه الحالة هي عملية جداء (تركيب) التطبيقات. أضف إلى ذلك، أنه إذا كانت R حلقة تبديلية، فإن $\mathrm{End}_R(M)$ تكون R – جبراً. إذا كان M R – مودولاً، فإن $M\cong\mathrm{Hom}_R(R,M)$ (انظر المثال 19.3.1).

لنتأمل الآن المودولات M، M_1، M'، M_1' فوق الحلقة R، وليكن $\varphi:M\to M_1$ و $\phi:M'\to M_1'$ هومومرفيزمي R – مودولات. عندئذ، يوجد التطبيقان:

$$\phi_*:\mathrm{Hom}_R(M,M')\to\mathrm{Hom}_R(M,M_1')$$

و

$$\psi^*:\mathrm{Hom}_R(M_1,M')\to\mathrm{Hom}_R(M,M')$$

المُعرّفان بالعلاقتين:

$$\phi_*(f) = \phi \circ f \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$$

و

$$\psi^*(g) = g \circ \psi \qquad \forall g \in \mathrm{Hom}_R(M_1, M')$$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "g"] & M' \\ & M \arrow[u, "g \circ \psi"'] \arrow[ul, "\psi"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\phi \circ f"'] & M' \arrow[d, "\phi"] \\ & M_1' \end{tikzcd}$$

بالحساب المباشر نجد:

$$\begin{aligned} \phi_*(f+g) &= \phi \circ (f+g) = \phi \circ f + \phi \circ g \\ &= \phi_*(f) + \phi_*(g) \end{aligned}$$

من أجل كل $\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni g,f$ ، و

$$\psi^*(f+g)=(f+g)\circ\psi=f\circ\psi+g\circ\psi$$
$$=\psi^*(f)+\psi^*(g)$$

من أجل كل $\mathrm{Hom}_R(M_1,M') \ni g,f$.

إن العلاقتين السابقتين تعنيان أن كلا من ϕ_* و ψ^* هو هومومرفيزم زمر. وإذا كانت الحلقة R تبديلية، فإنهما هوموميرفيزما مودولات.

إذا كان $R \ni \lambda$ و $\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f$ ، فإن:

$$\phi_*(\lambda f)=\phi\circ(\lambda f)=\lambda\phi\circ f=\lambda\phi_*(f)$$

وإذا كان $\mathrm{Hom}_R(M_1,M') \ni f$ ، فإن:

$$\psi^*(\lambda f)=\lambda f\circ\psi=\lambda(f\circ\psi)=\lambda\psi^*(f)$$

إذاً، ϕ_* و ψ^* هومومرفيزما R – مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية.

إذا أعطينا متوالية R – مودولات و R هومومرفيزمات مودولات:

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\phi_i} M_i \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots \qquad (1)$$

و R – مودولا N، فإن $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ و $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ تعنيان متواليتين من الزمر التبديلية (من المودولات إذا كانت الحلقة R تبديلية)،

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M_{i-1}) &\xrightarrow{(\phi_i)_*} \mathrm{Hom}_R(N,M_i) \\ &\xrightarrow{(\phi_{i+1})_*} \mathrm{Hom}_R(N,M_{i+1}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \qquad (2)$$

و

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_{i-1},N) &\xrightarrow{(\phi_i)^*} \mathrm{Hom}_R(M_i,N) \\ &\xrightarrow{(\phi_{i+1})^*} \mathrm{Hom}_R(M_{i+1},N) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \qquad (3)$$

والسؤال الطبيعي الذي يبرز حالاً هو: ما هي العلاقة المتبادلة بين صحة المتوالية (1) وصحة كل من المتواليتين (2) و (3). إحدى النتائج في هذا السياق هي الآتية.

نظرية 1.5.3: لتكن متوالية R – مودولات و R – هومومرفيزمات مودولات:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \qquad (4)$$

عندئذ المتوالية (4) صحيحة عندما وفقط عندما تكون المتوالية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(N,M_2) \qquad (5)$$

متوالية صحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات من أجل كل R – مودول N.

وإذا كانت:

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

متوالية R – مودولات و R – هومومرفيزمات، فإن المتوالية (6) صحيحة عندما وفقط عندما تكون المتوالية الآتية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2,N) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M_1,N) \qquad (7)$$

متوالية صحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات من أجل كل R – مودول N.