جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الخامسة عشر

في المودولات

البرهان: لتكن المتوالية (4) صحيحة، وليكن N R – مودولا كيفيا. ليكن $\mathrm{Hom}_R(N,M_1)\ni f$ حيث $\phi_*(f)=0$. عندئذ:

$$(\phi\circ f)(x)=\phi(f(x))=0,\quad \forall x\in N$$

لكن ϕ متباين، وبالتالي، $f(x)=0$ من أجل كل $N\ni x$، أي أن $f=0$. إذا، ϕ_* متباين.

بما أن المتوالية (4) صحيحة، فإن $\psi\circ\phi=0$، وبالتالي:

$$\begin{aligned}\psi\circ\phi\circ f&=\psi\circ\phi_*(f)=\psi_*(\phi_*(f))\\&=(\psi_*\circ\phi_*)(f)=0\ ,\ \forall f\in\mathrm{Hom}_R(N,M)\end{aligned}$$

إذاً، $\mathrm{Ker}(\psi_*)\supseteq\mathrm{Im}(\phi_*)$. بقي أن نبرهن الاحتواء المعاكس. ليكن $\mathrm{Ker}(\psi_*)\ni g$. عندئذ، $\psi_*(g)=\psi\circ g=0$، إذاً، $(\psi\circ g)(x)=0$ من أجل كل $N\ni x$. وبما أن $\mathrm{Im}(\phi)=\mathrm{Ker}(\psi)$، فإن $g(x)=\phi(y)$، $M_1\ni y$. بما أن ϕ متباين، فإن y معين

بشكل وحيد بالمعادلة $g(x)=\phi(y)$. إذاً، من الممكن تعريف $f:N\to M_1$ بالعلاقة $f(x)=y$ كلما كان $g(x)=\phi(y)$. إن f هو $R-$ هومومرفيزم مودولات (برهن!). بما أن $\phi_*(f)=g$، فإننا نستنتج أن $\mathrm{Ker}(\psi_*)=\mathrm{Im}(\phi_*)$، والمتوالية (5) صحيحة. إن صحة المتوالية (7) تُبرهن بمناقشة مماثلة لما سبق (برهن !).

بالعكس، لنفرض أن المتوالية (5) صحيحة من أجل كل $R-$ مودول N. عندئذ، ϕ_* متباين من أجل كل $R-$ مودول N. لنفرض أن $N=\mathrm{Ker}(\phi)$ و $i:N\to M_1$ تطبيق الاحتواء (الإدخال). عندئذ:

$$\phi_*(i)=\phi\circ i=0$$

بما أن $\phi_*:\mathrm{Hom}_N(N,M_1)\to\mathrm{Hom}_R(N,M)$ متباين، فإن $i=0$ و $N=<0>$. إذاً، ϕ متباين.

ليكن الآن $N=M_1$. لدينا:

$$\psi\circ\phi=(\psi_*\circ\phi_*)(i_{M_1})=0$$

إذاً، $\mathrm{Ker}(\psi)\supseteq\mathrm{Im}(\phi)$.

ليكن الآن $\mathrm{Ker}(\psi)=N$، وليكن $\iota : N \to M$ تطبيق الاحتواء (الإدخال). بما أن $\psi_*(\iota)=\psi\circ\iota=0$، فإن صحة المتوالية (5) تقتضي أن يكون $\iota=\phi_*(\alpha)$ من أجل α ما من $\mathrm{Hom}_R(N,M_1)$. إذاً،

$$\mathrm{Im}(\phi)\supseteq \mathrm{Im}(\iota)=N=\mathrm{Ker}(\psi)$$

ونستنتج أن المتوالية (4) صحيحة.

مرة أخرى، إن صحة المتوالية (6) تبرهن بشكل مشابه (برهن!). وبذلك يتم برهان النظرية 1.5.3. □

ملاحظة: قد تكون المتوالية (4) صحيحة، ولكن المتواليتين (5) و (7) غير صحيحتين، أي أن ψ_* أو ϕ^* ليس بالضروري أن يكون غامراً. فيما يلي بعض الأمثلة الموضحة لذلك.

مثال 2.5.3: لنتأمل المتوالية القصيرة الصحيحة من $\mathbb{Z}$ – مودولات:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \qquad (8)$$

حيث أن $\phi(i) = mi$ و ψ هو الإسقاط الطبيعي (الهومومرفيزم الطبيعي). إذا كان $N = \mathbb{Z}_n$، فإن المتوالية (7) تصبح في هذه الحالة:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$$

أو بالشكل:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{Z}_n$$

بحسب المثال 9.3.1، وبالتالي:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Ker}(\phi^*)$$

ليكن $d = g \cdot c \cdot d \cdot (m,n)$، وليكن $m = dm'$ و $n = dn'$. ليكن $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \ni f$ عندئذ، من الواضح أن $\phi^*(f) = 0$ عندما وفقط عندما $\phi^*(f)(1) = 0$. لكن:

$$\phi^*(f)(1) = f(m \cdot 1) = mf(1) = m'df(1)$$

بما أن m' أولي مع n، فإن $m'df(1) = 0$ عندما وفقط عندما $df(1) = 0$، وهذا محقق عندما وفقط عندما $f(1) \in n'\mathbb{Z}_m$. إذاً،

$$\mathrm{Ker}(\phi^*) = n'\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$$

أي أن:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d \qquad (9)$$

هذا المثال يبين أيضاً أنه حتى إذا كانت:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

صحيحة، فإن المتواليتين (5) و (7) ليستا، في الحالة العامة، جزأين من متواليتين صحيحتين. وللسهولة نأخذ $m = n$.

إن المتوالية (7) تصبح:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\phi^*} \mathbb{Z}_m \qquad (10)$$

حيث $\phi^* = 0$، وبالتالي، ϕ^* ليس غامراً، في حين تصبح المتوالية (5):

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \qquad (11)$$

بما أن $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ و $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$، فإن المتوالية (11) تصبح:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z}_n$$

و ψ_* ليس غامراً.

إن هذه الأمثلة تبين أن النظرية 1.5.3 هي أفضل ما يمكن تحققه، بشكل عام، فيما يخص صحة المتواليات عند تطبيق $\mathrm{Hom}(-,-)$. ومع ذلك، فهناك المقياس الآتي للمحافظة على صحة المتواليات القصيرة الصحيحة عند تطبيق $\mathrm{Hom}(-,-)$.

نظرية 3.5.3: إذا كان N R – مودولا كيفيا و

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (12)$$

متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات، فإن المتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(N,M_2) \longrightarrow 0$$

(13)

والمتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_2,N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(M_1,N) \longrightarrow 0$$

(14)

متواليتان قصيرتان صحيحتان منشطرتان من الزمر التبديلية (من R – مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية).

البرهان: نبرهن فقط انشطار المتوالية (13)؛ برهان انشطار المتوالية (14) مشابه. بحسب النظرية 1.5.1، يكفي أن نبرهن أن ψ_* غامر ويوجد شاطر (مشطر) للمتوالية (13). ليكن $\beta : M_2 \to M$ مُشطرا للمتوالية (12) و $f \in \mathrm{Hom}_R(N, M_2)$. عندئذ:

$$\begin{aligned}\psi_* \circ \beta_*(f) &= \psi_*(\beta \circ f) = \psi(\beta \circ f) \\ &= (\psi \circ \beta) \circ f = i_{M_2} \circ f \\ &= i_{\mathrm{Hom}_R(N, M_2)}(f)\end{aligned}$$

إذا $\psi_* \circ \beta_* = i_{\mathrm{Hom}_R(N, M_2)}$، وبالتالي ψ_* غامر و β_* شاطراً (مُشطر) للمتوالية (13). □

نتيجة 4.5.3: لتكن M_1 و M_2 و N $R-$ مودولات. عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2) \cong \mathrm{Hom}_R(N, M_1) \oplus \mathrm{Hom}_R(N, M_2) \qquad (15)$$

و

$$\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M_1, N) \oplus \mathrm{Hom}_R(M_2, N) \qquad (16)$$

والإيزومرفيزمان هما $\mathbb{Z}$ – إيزومرفيزما مودولات (R – إيزومرفيزما مودولات إذا كانت R حلقة تبديلية).

البرهان: كلا الإيزومرفيزمان ينتجان بتطبيق النظريتين 3.5.3 و 1.5.3، على المتوالية الصحيحة المنشطرة:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \longrightarrow 0$$

حيث $q_1(m) = (m, 0)$ الإدخال الطبيعي، و $p_2(m_1, m_2) = m_2$ الإسقاط الطبيعي. □

ملاحظتان:

(1) إن الإيزومرفيزم (15) مُعطى بالعلاقة:

$$\phi(f) = (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$$

حيث $\mathrm{Hom}_R(N, M_1 \oplus M_2) \ni f$ و $p_2(m_1, m_2) = m_i$ ، حيث $i = 1,2$ ، في حين أن الإيزومرفيزم (16) معطى بالعلاقة:

$$\psi(f) = (f \circ q_1, f \circ q_2)$$

حيث $\mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N) \ni f$ ، $q_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2$ مُعطى بالعلاقة $q_1(m) = (m, 0)$ و $q_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ مُعطى بالعلاقة $q_2(m) = (0, m)$.

(2) إن النتيجة 4.5.3 يمكن تعميمها على مجموع مباشر لأسرة R – مودولات $(M_i)_{i \in I}$ ، ليس من الضروري أن تكون I منهية، وهذا ما سنفعله في البند القادم.

3 – 6 هومومرفيزم الجداء المباشر والمجموع المباشر

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ و $(N_j)_{j\in J}$ أسرتي R – مودولات، ولتكن $(\alpha_{ij} : I \ni i, J \ni j)$ أسرة R – هومومرفيزمات مودولات:

$$\alpha_{ij} : M_i \to N_i, \quad i \in I, j \in J$$

نُعرّف التطبيق:

$$\varphi : \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{j\in J} M_j$$

بالعلاقة $\varphi((m_i)) = (\alpha_{ij}(m_i))$. يرمز عادة لـ φ بالرمز $\prod_{i,j} \alpha_{ij}$. من الواضح أن φ هو هومومرفيزم R – مودولات. ونُعرّف:

$$\psi : \oplus_{i\in I} M_i \to \oplus_{j\in J} M_j$$

بالعلاقة $\psi((m_i)) = (\alpha_{ij}(m_i))$، $I \ni i, J \ni j$. أيضاً، من الواضح أن ψ هو هومومرفيزم R – مودولات. يرمز لـ ψ بالرمز $\bigoplus_{i,j} \alpha_{ij}$.

إن الفرضيات الآتية صحيحة وهي سهلة البرهان:

(1) φ مونومرفيزم $\Leftrightarrow$ ψ مونومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} مونومرفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

(2) φ إيبيمورفيزم $\Leftrightarrow$ ψ إيبيمومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} إيبيمورفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

(3) φ إيزومرفيزم $\Leftrightarrow$ ψ إيزومرفيزم $\Leftrightarrow$ α_{ij} إيزومرفيزم من أجل كل $I \ni i$ وكل $J \ni j$.

نترك برهان هذه الفرضيات للقارئ كتمرين.

إذ كان:

$$m_i \mapsto m_i : \iota_i : \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to M_i$$

$$n_j \mapsto n_j : \iota_j : \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to N_j$$

فإن التطبيقات:

$$(1)\quad \prod_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Ker}(\varphi) \;:\; (m_i) \mapsto (\iota_i(m_i))\;;$$

$$(2)\quad \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Ker}(\psi) \;:\; (m_i) \mapsto (\iota_i(m_i))\;;$$

$$(3)\quad \prod_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Im}(\varphi) \;:\; (n_j) \mapsto (\iota_j(n_j))\;;$$

$$(4)\quad \bigoplus_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \to \mathrm{Im}(\psi) \;:\; (n_j) \mapsto (\iota_j(n_j))\;;$$

هي إيزومرفيزمات R – مودولات، وبالتالي:

$$\prod_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Ker}(\varphi) \quad , \quad \bigoplus_{i,j} \mathrm{Ker}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Ker}(\psi)$$

$$\prod_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Im}(\varphi) \quad , \quad \bigoplus_{i,j} \mathrm{Im}(\alpha_{ij}) \cong \mathrm{Im}(\psi)$$

أي أن:

جداء الأنوية إيزومورفي نواة الجداء	،	مجموع الأنوية إيزومورفي نواة المجموع
جداء الصور إيزومورفي صورة الجداء	،	مجموع الصور إيزومورفي صورة المجموع

فرضية 1.6.3: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ و $(N_j)_{j\in J}$ أسرتي R – مودولات. عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_R\left(M_i, N_j\right) \qquad (1)$$

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigoplus_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{i\in I}\left(\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_R\left(M_i, N_j\right)\right) \qquad (2)$$

كرمز، وإذا كانت R تبديلية، فإن الإيزومرفيزمين السابقين يكونان إيزومرفيزمي R – مودولات.

البرهان: نبرهن الإيزومرفيزم (1)، ونترك برهان (2) كتمرين للقارئ لأنه مشابه لبرهان (1). نُعرّف التطبيق:

$$\phi : \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\right) \to \prod_{i,j}\left(\mathrm{Hom}_R\left(M_i, N_j\right)\right)$$

بالعلاقة:

$$\phi(\varphi)=(p_j\circ\varphi\circ q_i)$$

من أجل كل $\varphi\in\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I}M_i,\prod_{j\in J}N_j)$. من الواضح أن φ هو هومومرفيزم زمر.

φ متباين: ليكن $\varphi\neq 0\in\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I}M_i,\prod_{j\in J}N_j)$. عندئذ، يوجد $(m_i)\in\bigoplus_{i\in I}M_i$ بحيث يكون $\varphi(m_i)\neq 0$. بما أن $(m_i)=\Sigma m_i$ من أجل $m_i\neq 0$، فإن:

$$\begin{aligned}
&\varphi(m_i)=\varphi(\Sigma m_i)=\Sigma\varphi(m_i)\neq 0\\
&\Rightarrow\exists\, i\in I:\varphi(m_i)=\varphi q_i(m_i)\neq 0\\
&\Rightarrow\exists\, j\in J:p_j\varphi q_i(m_i)\neq 0\\
&\Rightarrow p_j\varphi q_i\neq 0
\end{aligned}$$

φ غامر: ليكن $\alpha_{ij}\in\prod_{i,j}(\mathrm{Hom}_R(M_i,N_j))$، بحسب تعريف الجداء المباشر، بتثبيت $i\in I$ يوجد $h_i:M_i\to\prod_{j\in J}N_j$ يَجعل المخطط: