جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة السادسة عشر

في المودولات

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[d, "h_i"'] \arrow[dr, "\alpha_{ij}"] & \\ \prod_{j\in J} N_j \arrow[r, "p_i"'] & N_i \end{tikzcd}$$

تبديلياً.

ومرة ثانية بحسب التعريف بالنسبة إلى الأسرة $(h_i)_{i\in I}$، يوجد الهومومرفيزم $\varphi:\oplus M_i \to \prod N_j$ يجعل المخطط:

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[d, "h_i"] \\ \oplus M_i \arrow[r, "\varphi"'] & \prod N_j \end{tikzcd}$$

تبديلياً. لذلك، فإن:

$$\alpha_{ij} = p_j \circ h_i = p_j \circ \varphi \circ q_i$$

أي أن $\phi(\varphi) = (p_j \circ \varphi \circ q_i) = (\alpha_{ij})$، و ϕ غامر. □

هناك حالات خاصة من الفرضية 1.6.2، لكنها هامة جدا:

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N), \quad \varphi \mapsto (\varphi \circ q_i)$$

$$\mathrm{Hom}_R\left(M, \prod_{j\in J} N_j\right) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(M, N_j), \quad \varphi \mapsto (p_j \circ \varphi)$$

تعريف 2.6.3: ليكن P و N مودولين جزئيين متتامين في R – مودول M: $M = N \oplus P$. عندئذ، كل عنصر $x \in M$ يُكتب بشكل وحيد، بالشكل الآتي

$x=n+p$، حيث $N \ni n$ و $P \ni p$. يُسمى التطبيق $\pi: M \to N$ إسقاطاً على N موازياً إلى P إذا كان $\pi(x)=n$.

تعريف 3.6.3: يُسمى R – هومومرفيزم $f: M \to M$ إسقاطاً إذا وجد مودولان جزئيان متتامان N و P في M بحيث يكون f إسقاطاً على N موازياً إلى P.

ويُسمى $f: M \to M$ متساوي القوى إذا كان $f^2 = f \circ f = f$.

إن النظرية الآتية تربط مفهوم تتام مودولين جزئيين في R – مودول بمفهومي تطبيق الإسقاط والتطبيق متساوي القوى.

نظرية 4.6.3: إذا كان M_1 و M_2 مودولين جزئيين متتامين في R – مودول M، وإذا كان $f:M\to M$ إسقاطاً على M_1 موازياً لـ M_2، فإن:

(1) $M_1=\mathrm{Im}(f)=\{x\in M: f(x)=x\}$؛

(2) $\mathrm{Ker}(f)=M_2$؛

(3) f متساوي القوى؛

البرهان: (1) من الواضح أن $M_1=\mathrm{Im}(f)=\{x\in M: f(x)=x\}$. إذا كان $m_1\in M_1$ فإن تمثيله الوحيد كمجموع هو $m_1=m_1+0$، وبالتالي $m_1\in\{x\in M: f(x)=x\}$.

(2) لدينا:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{x \in M : f(x) = f(m_1 + m_2) = m_1 = 0\} \\ &= \{x \in M : x = 0 + m_2 = m_2\} \\ &= M_2\end{aligned}$$

(3) من أجل كل $x \in M$ لدينا $f(x) \in M_1$، وبحسب (1) يكون:

$f(f(x)) = f^2(x) = f(x)$ و $f \circ f = f^2 = f$. □

نظرية 5.6.3: يكون R – هومومرفيزم إسقاطاً عندما فقط وعندما يكون متساوي القوى (وفي هذه الحالة يكون إسقاطاً على $\mathrm{Im}(f)$ موازياً إلى $\mathrm{Ker}(f)$).

البرهان: نفرض أن f متساوي القوى. ليكن $x \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. عندئذ، $f(y) = x$، $y \in M$ و $f(x) = 0$، وبالتالي:

$$x = f(y) = f^2(y) = f(f(y)) = f(x) = 0$$

أضف إلى ذلك، من أجل كل $x \in M$:

$$f(x - f(x)) = f(x) - f(f(x)) = 0$$

إذاً، $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. عندئذ، من المساواة $x = f(x) + x - f(x)$ نجد أن $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$. ليكن $m = x + y$، $x \in \mathrm{Im}(f)$ و $y \in \mathrm{Ker}(f)$، عندئذ، $f(z) = x$، $z \in M$ و $f(y) = 0$، وبالتالي:

$$f(m) = f(x + y) = f(x) + 0 = f(f(z)) = f(z) = x$$

وبعبارة أخرى، إن f هو إسقاط على $\mathrm{Im}(f)$ مواز إلى $\mathrm{Ker}(f)$. إن العكس واضح جداً بحسب النظرية 4.6.2. □

نبين فيما بعد كيف يمكن التعبير عن تحليل R – مودول إلى مجموع مباشر منته بدلالة الإسقاطات.

نظرية 6.6.3: يكون R مودول M مجموعاً مباشراً للمودولات الجزئية $M_1,\cdots,M_n$ عندما فقط وعندما R – هومومرفيزمات غير معدومة $p_1,\cdots,p_n$، حيث $p_i : M \to M$، $i=1,\cdots,n$ (p_i إسقاط بالضرورة)، بحيث يكون:

(1) $\sum_{i=1}^{b} p_i = id_M$؛

(2) $p_i \circ p_j = 0$ إذا كان $i \neq j$.

البرهان: نفرض أن $M = \oplus_{i\in I} M_i$. عندئذ، من أجل كل i، لدينا:

$$M = M_i \underset{i=j}{\oplus} (M_j)$$

ليكن p_i الإسقاط على M_i الموازي إلى $\underset{i\neq j}{\oplus}(M_j)$. عندئذ، من أجل كل $x \in M$، من أجل $i \neq j$:

$$(p_i \circ p_j)(x) = p_i(p_j(x)) \in p_i(\mathrm{Im}(p_j)) = p_i(M_j) \quad \text{(بحسب النظرية 4.6.3)}$$

$$\subseteq p_i(\bigoplus_{j \neq i} M_j)$$

$$= p_i(\mathrm{Ker}(p_j) \quad \text{(بحسب النظرية 4.6.3)}$$

$$= \{0\}$$

وبالتالي، $(p_i \circ p_j) = 0$ من أجل $i \neq j$. أيضاً، بما أن كل $x \in M$ يكتب بشكل وحيد بالشكل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ حيث $x_i \in M_i$ من أجل كل i، وبما أن $p_i(x) = x_i$ من أجل كل i، فإن:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)(x)$$

وإن $\sum_{i=1}^{n} p_i = id_M$.

بالعكس، نفرض أن $p_1,\cdots,p_n$ تحقق الشرطين (1) و (2). عندئذ:

$$p_i = p_i \circ id_M = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) = p_i \circ p_i$$

إذا، p_i متساوي القوى، وبالتالي هو إسقاط بحسب النظرية 5.6.3.

لدينا الآن، بحسب (1):

$$x = id_M(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$$

ولذلك $M = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(p_i)$. أضف إلى ذلك، إذا كان $\mathrm{Im}(p_i) \cap \sum_{i=j} \mathrm{Im}(p_j) \ni x$ فإن:

$$x_j = p_j(x) \text{ ، } x = \sum_{i=j} x_j \text{ ، } x = p_i(x) \text{ من أجل } i \neq j$$

وبحسب (2) ينتج:

$$x = p_i(x) = p_i\left(\sum_{i=j} p_j(x)\right) = \sum_{i=j} (p_i \circ p_j)(x) = 0$$

وينتج من ذلك أن $M = \oplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(p_i)$. □

إن النظرية 6.6.3 يمكن صياغتها بلغة المتواليات الصحيحة بالشكل الآتي:

ليكن M R – مودولاً و $M_1,\cdots,M_n$ مودولات جزئية في M، عندئذ، $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i \Leftrightarrow$ تكون المتوالية:

$$M_i \xrightarrow{q_i} M \xrightarrow{p_i'} \bigoplus_{i=j} M_j$$

صحيحة.

تعريف 7.6.3: ليكن M R – مودولاً. تسمى المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

حيث F R – مودول حر، تمثيلاً حراً لـ M.

من هذا التعريف ينتج أن الفرضية 5.7.1 تنص على أنه يوجد تمثيل حر لكل مودول.

فرضية 8.6.3: ليكن F R – مودولاً حراً. عندئذ كل متوالية قصيرة صحيحة:

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \xrightarrow{f} F \longrightarrow 0$$

من R – مودولات منشطرة.

البرهان: لتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة للمودول الحر F. بما أن f غامر، فمن أجل كل $i\in I$ يوجد $y_i\in M$ بحيث يكون $f(y_i)=x_i$. نُعرّف $h:X\to M$ بالعلاقة $h(x_i)=y_i$. نوسع هذا التطبيق h إلى الهومومرفيزم $\beta:F\to M$:

$$\beta\left(\sum_i a_i x_i\right)=\sum_i a_i h(x_i)$$

(بحسب النظرية 3.4.3، β معين بشكل وحيد). بما أن $(f\circ\beta)=x_i=id_F(x_i)$ من أجل كل $i\in I$، فإن $f\circ\beta=id_F$، والمطلوب ينتج من النظرية 3.4.3. □

نتيجة: 9.6.3:

(1) ليكن M R – مودولاً و $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً حيث M/N حر. عندئذ $M \cong N \oplus (M/N)$.

(2) ليكن $f: M \to F$ هومومرفيزم R – مودولات غامراً، حيث F حر، عندئذ $M \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus F$.

البرهان: (1) بما أن M/N حر، فإن المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

تنشطر بحسب 8.6.3، لذلك:

$$M \cong N \oplus (M/N)$$

بحسب النظرية 3.4.3.

(2) نأخذ $N = \mathrm{Ker}(f)$ في القسم (1) نجد:

$$M \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus F$$

وبذلك يتم البرهان. □

نتيجة 10.6.3: ليكن N R – مودولاً كيفياً و F R – مودولاً حراً. إذا كانت:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$$

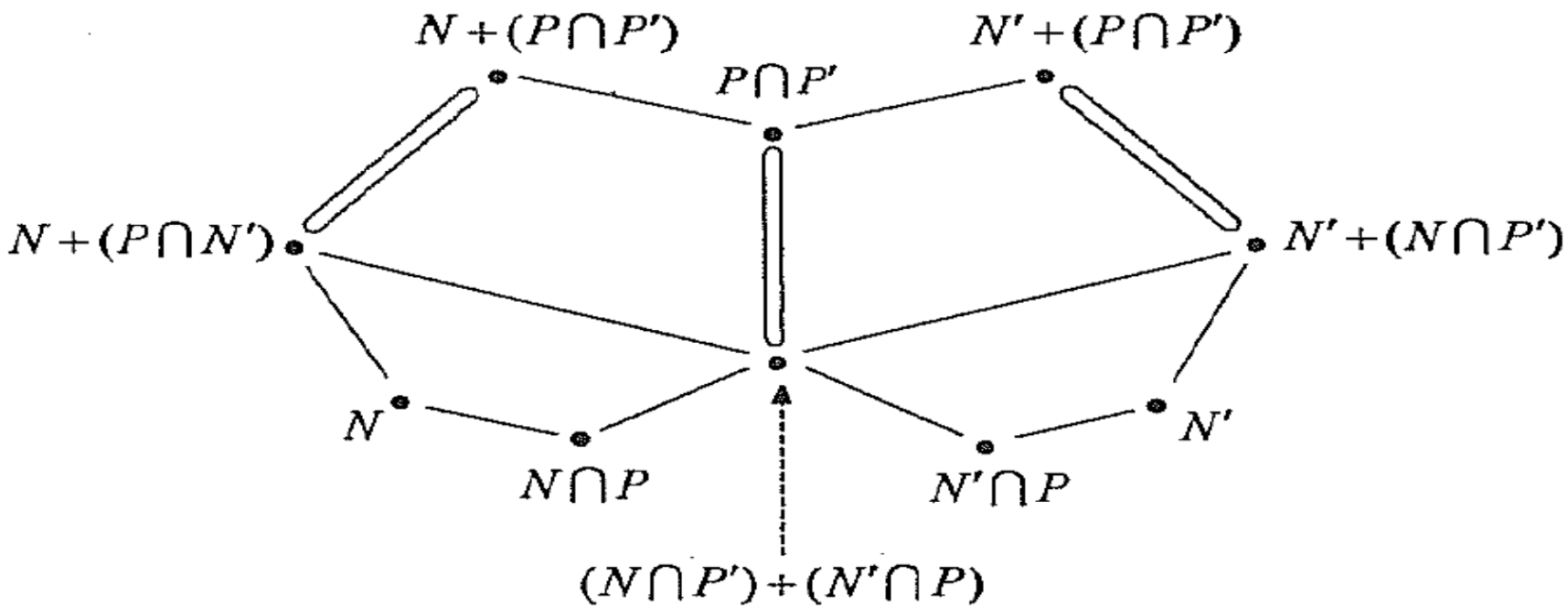
متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات و R هومومرفيزمات، فإن المتوالية:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N,F) \longrightarrow 0$$

متوالية صحيحة قصيرة من زمر تبديلية (R – مودولات، إذا كانت الحلقة R تبديلية).

البرهان: بحسب الفرضية 8.6.3، المتوالية الأصلية تنشطر، والنتيجة تنتج من النظرية 3.5.3. □

النظرية 11.6.3: ليكن M R – مودولاً، ولتكن N، P، N'، P' مودولات جزئية في M حيث $P \supseteq N$ و $P' \supseteq N'$. عندئذ، في المخطط التالي تشير الخطوط العريضة إلى عوالم مودولات إيزومرفية فيما بينها.



وبكلام أكثر دقة:

$$\frac{N+P\cap P'}{N+(P\cap N')} \cong \frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)} \cong \frac{N'+P\cap P'}{N'+(N\cap P')}$$

البرهان: بما أن $P\cap P' \supseteq (P\cap N')$، فإن:

$$(P\cap P')+N+(P\cap N')=(P\cap P')+N$$

ولكن:

$$(P\cap P')[N+(P\cap N')]=(P\cap P'\cap N)+(P\cap N')=(P'\cap N)+(P\cap N')$$

بتطبيق نظرية الإيزومرفيزم الثالثة نحصل على الإيزومرفيزم:

$$\frac{P\cap P'}{(N\cap P')+(N'\cap P)}\cong\frac{N+P\cap P'}{N+(P\cap N')}$$

وبالمثل نحصل على الإيزومرفيزم الثاني. □