جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة السابعة عشر

في المودولات

الفصل الرابع
المودولات النيوترية و الارتينية

تعريف 1.1.4: لتكن Γ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً بالعلاقة $\leq$. عندئذ:

(1) نقول أن السلسلة المتزايدة:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \qquad (1)$$

تنقطع إذا وجد n_0 بحيث يكون $a_m = a_n$ من أجل كل $n_0 \leq n, m$، إذا كانت كل سلسلة متزايدة في Γ منقطعة، فإننا نقول إن Γ تحقق شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.).

(2) نقول أن Γ تحقق شرط الأعظمية إذا كانت كل مجموعة جزئية في Γ تحوي عنصراً أعظمياً.

لنبرهن الفرضية الآتية.

فرضية 2.1.4: لتكن Γ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) Γ تحقق a.c.c.

(2) كل سلسلة متزايدة تماماً منتهية إذا كانت:

$$a_1 < a_2 < \cdots \qquad (1)$$

سلسلة متزايدة تماماً في Γ، فإنها تحوي عدداً محدود من الحدود.

(3) Γ تحقق شرط الأعظمية: كل مجموعة خالية في Γ تحوي عنصراً أعظمياً.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): واضح جدا.

(2) $\Leftarrow$ (3): لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في Γ، وليكن $a \in S$. إذا لم يكن a_1 أعظميا في S، فإنه يوجد $a_2 \in S$ بحيث يكون $a_1 < a_2$. وبشكل عام، من أجل كل $a_n \in S$، إما أن يكون a_n أعظميا، وإما أن يوجد $a_{n+1} \in S$ بحيث يكون $a_n < a_{n+1}$. عندئذ نحصل على السلسلة (2) التي يجب أن تنقطع بحسب الفرضية (2)، والعنصر الأخير الذي تنقطع عنده السلسلة هو العنصر الأعظمي في S.

(3) $\Leftarrow$ (1): إذا أعطينا السلسلة (1)، نأخذ المجموعة $\{a_1, a_2, \cdots\}$. لتكن a_m عنصرا أعظميا فيها. عندئذ، $a_m = a_n$ من أجل كل $m \le n$. إذا، $a_m = a_m + i$، من أجل كل $i \in \mathrm{N}$. □

نلاحظ أن فرضية (مبدأ، بديهية) الاختيار استخدمت عند اقتضاء (2) $\Leftarrow$ (3)؛ يمكن بيان أنه لا يمكن الاستغناء عن ذلك. إذا، بدون شرط الاختيار يكون شرط الأعظمية أقوى من شرط السلسلة المتزايدة، ولكن عند وجود هذا المبدأ يكافئ أحد الشرطين (2) و (3) ، الآخر.

هناك مبدأ استقراء مفيد جدا يطبق على المجموعات التي تحقق شرط الأعظمية.

فرضية 3.1.4 (الاستقراء النيوتري): لتكن Γ مجموعة مرتبة جزئياً تحقق شرط الأعظمية. إذا كانت S مجموعة جزئية في Γ تحوي أي عنصر $\Gamma \ni a$ عندما تحوي كل العناصر $\Gamma \ni x$ حيث $a < x$، فإن $\Gamma = S$.

البرهان: لتكن T متممة S في Γ. لنفرض أن $T \neq \phi$، وليكن t عنصراً أعظمياً في T. عندئذ كل $t < x$ يجب أن يكون من S. وبحسب الفرض، يجب أن يكون $S \ni t$ وهذا تناقض لأن $T \ni t$ و $T \cap S = \phi$، إذا، $T = \phi$ و $\Gamma = S$. □

بحسب المثنوية، أي بعكس الترتيب، نستطيع تعريف شرط المتناقصة (d.c.c.)، أو شرط الأصغرية بنفس الطريقة، وكما في الفرضية 3.1.4، نحصل على مبدأ الاستقراء بالنسبة إلى المجموعة التي تحقق شرط الأصغرية.

من الواضح أن كل مجموعة منهية ومرتبة تحقق شرطي الأعظمية والأصغرية كليهما، لكن العكس ليس صحيحا، كما يتبين من مجموعة لانهائية، كل عناصرها يمكن مقارنتها بعضها ببعض.

والآن نطبق هذه الأفكار العامة والمجردة على شبكة المودولات الجزئية في $R-$ مودول M. وهذا موضوع البند الآتي الذي يناقش بشكل موجز نوعين من المودولات: النيوترية والأرتينية.

4 – 2 المودولات النيوترية والأرتينية

لتكن R حلقة و M R – مودولا. إذا كانت مجموعة المودولات الجزئية في M تحقق a.c.c.، فإننا نقول أن M مودول نيوتري. وإذا كانت مجموعة المودولات الجزئية في M تحقق شرط d.c.c.، فإننا نقول إن M مودول أرتيني. وإذا طبقنا هذه المنهجية على الحلقة R باعتبارها – مودولاً، فإننا نحصل على مفهوم الحلقة النيوترية ومفهوم الحلقة الأرتينية.

أول من استخدم شرط a.c.c. العالمة الألمانية Emmy Noether (1880– 1935) وأول من استخدم d.c.c. هو العالم Emil Artin (1898 – 1962). إن مبدأ الأعظمية بالنسبة إلى المودولات يمكن صياغته بطريقة أخرى. نبدأ من البداية.

تعريف 1.2.4: ليكن M R – مودولاً، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M، إذا كان:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \qquad (1)$$

فإننا نقول أن الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ تشكل سلسلة متزايدة أو صاعدة. وإذا وجد n_0 بحيث يكون $M_{n_0} = M_{n_0+i}$ من أجل $i \in \mathbb{N}$، فإننا نقول إن السلسلة (1) متقطعة عند الحد M_{n_0} أو أنها تحقق شرط السلسلة المتزايدة.

إذا كانت كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M متقطعة، فإننا نقول إن M يحقق شرط السلسلة المتزايدة a.c.c.

نظرية 2.2.4: يكون R – مودول M نيوترياً عندما وفقط عندما كل مودول جزئي في M منتهي التوليد. وبشكل خاص M منتهي التوليد.

البرهان: نفرض أن M مودول نيوتري، وليكن $M \supseteq N$ مودولاً جزئياً. نختار العناصر $x_1, x_2, \cdots$ من N، وليكن $N_i = \langle x_1, \cdots, x_{i-1} \rangle$، بحيث يكون $x_i \notin N_i$. عندئذ، نحصل على السلسلة المتزايدة:

$$\langle 0 \rangle = N_1 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots$$

هذه السلسلة يجب أن تنقطع عند الحد N_r، مثلا. عندئذ، $N = N_r$ و N منتهي التوليد.

بالعكس، نفرض أن كل مودول جزئي في M منتهي التوليد. لتكن:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M. عندئذ، $N = \sum_i M_i$ مودول جزئي في M منتهي التوليد، مثلا $N = < x_1, \cdots, x_r >$. يوجد دليل ما n بحيث يكون $M_n \ni x_i$ من أجل كل $1 \le i \le r$ [إذا كان $x_i \in M_{n_i}$، نختار n بالشكل $n = \max\{n_1, \cdots, n_r\}$ فنجد المطلوب]. وبالتالي $N = M_n$ والسلسلة تنقطع عند الحد M_n و M نيوتري. □

بسبب النظرية 2.2.4، تكون المودولات النيوترية أكثر أهمية من المودولات الأرتينية: إن شرط النيوترية هو تماماً شرط الانتهاء، الذي يجعل كثير من النظريات

تأخذ مفعولها. ومع ذلك فإن كثيراً من الخواص الأساسية تطبق بالتوازي على المودولات النيوترية والمودولات الأرتينية.

إذا كانت الحلقة R نيوترية (أرتينية)، فإن R – مودول دوري (كونه من الشكل R/I من أجل إيديال ما I في R) هو أيضاً نيوتري (أرتيني، على الترتيب). لوجود تقابل 1-1 بين المودولات الجزئية في R والتي تحوي I وبين المودولات الجزئية في R/I بحسب نظرية التقابل، ونستطيع أن نقول أكثر من ذلك.

نظرية 3.2.4: لتكن R حلقة نيوترية (أرتينية). كل R – مودول منتهي التوليد هو نيوتري (أرتيني، على الترتيب).

البرهان: ليكن $M=<x_1,\cdots,x_n>$، وليكن $M'=<x_1,\cdots,x_{n-1}>$ مودولاً جزئياً في M. عندئذ، $M''=M/M'$ دوري، ولدينا المتوالية الصحيحة:

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

في هذه المتوالية، M' يحقق شرط الأعظمية بحسب الفرض بالاستقراء، و M'' يحقق شرط الأعظمية لأنه دوري.

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M ولتكن $(\overline{M}_i)_{i\in \mathbb{N}}$ الأسرة المقابلة لها في M'' وفق الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi : M \to M/M'$، وليكن $\overline{N}$ عنصرها الأعظمي. عندئذ يكون $N = \varphi^{-1}(\overline{N})$ عنصرا أعظميا للأسرة $(M_i)_{i\in \mathbb{N}}$.

البرهان: في حالة الأرتينية مشابه. □

في ساحة الإيديالات الرئيسة كل إيديال منتهي التوليد. فهي حلقة نيوترية، وبالتالي:

نتيجة 4.2.4: كل مودول منتهي التوليد فوق ساحة إيديالات رئيسة هو مودول نيوتري.

إذا كان M R – مودولاً نيوترياً فكل مودول جزئي فيه منتهي التوليد، وبشكل خاص M نفسه منتهي التوليد، وإذا كانت الحلقة R نيوترية، فإن هذا الشرط يكفي أيضاً.

وعندئذ، نحصل على النتيجة الهامة المعروفة جيداً وهي أن مودول منتهي التوليد فوق حلقة نيوترية هو مودول نيوتري، فيما يلي نعطي برهان هذه النتيجة في صيغة أكثر عمومية.

نظرية 5.2.4: لتكن R حلقة و M R – مودولا:

(1) ليكن $M \supseteq M'$ مودولاً جزئياً و $\varphi : M \to M/M'$ الإسقاط الطبيعي إذا كان N_1 و N_2 مودولين جزئيين في M، حيث $N_2 \supseteq N_1$، $N_1 \cap M' = N_2 \cap M'$ و $\varphi(N_1) = \varphi(N_2)$ فإن $N_1 = N_2$.

(2) لتكن $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ متوالية صحيحة من R – مودولات. إذا كان M' و M'' كلاهما نيوتريين (أرتينيين) فإن M كذلك.

(3) إذا كان M R – مودولاً منتهي التوليد، وإذا كانت R حلقة نيوترية (أرتينية)، فإن M كذلك.

البرهان: (1): ليكن $N_2 \ni y$ عنصراً كيفياً. عندئذ، $\varphi(y) \in \varphi(N_1) = \varphi(N_2)$.
إذاً، يوجد $N_1 \ni x$ بحيث يكون $\varphi(x) = \varphi(y_1)$، وبالتالي $\varphi(y-x) = 0$ أو $M' = \mathrm{Ker}\varphi \ni y - x$. إذاً:

$$y - x \in N_2 \cap M' = N_1 \cap M' \ , \ (x, y \in N_2, N_1 \subseteq N_2)$$

إذاً، $N_1 \ni x, y$ و $N_1 \ni y$ لأن $N_1 \ni x$.

(2): ينتج مباشرة بتطبيق (1) على سلسلة متزايدة (متصاعدة على الترتيب) من مودُولات جزئية في M.

(3): إذا كان M مودولاً بـــ n عنصراً، فإن M هو الصورة الهومومرفية لـــ R^n، وبالتالي يكفي بيان أن R^n نيوتري (أرتيني على الترتيب). ولكن ذلك ينتج مباشرة من (2). □

كل مودول منتهي التوليد فوق حلقة ما يتمتع بخاصة الأعظمية الهامة الآتية، والتي تنتج من فرضية زورن.

فرضية 6.2.4: ليكن M R – مودولاً منتهي التوليد. عندئذ، كل مودول جزئي خاص في M محتوى في مودول جزئي خاص أعظمي.

البرهان: ليكن $M=<x_1,\cdots,x_n>$ وليكن N مودولاً جزئياً في M. لتكن Γ مجموعة كل المجموعات الجزئية X في M والتي تولد مع N مودولاً جزئياً خاصاً في M. إن المجموعة الجزئية $X_1 \notin \Gamma$ عندما تكون العناصر $x_1,\cdots,x_n$ جميعها تراكيب خطية لعناصر من X_1 ومن N، وهذا الشرط يحققه فقط عدد محدود من العناصر من X_1. إذا، $\Gamma \ni X_1$ تماماً عندما تنتهي كل مجموعاتها الجزئية المنتهية إلى Γ، وبالتالي Γ ذات هوية منتهية. إذا، توجد مجموعة جزئية أعظمية X في Γ، يكون المودول الجزئي المولد بـــ $N \cup X$ ثانية من Γ، وبسبب أعظمية X في Γ، فإن $X=<N \cup X>$. إذا $X \supseteq N$. □

هذه النتيجة تطبق على الحلقة R نفسها باعتبارها R – مودولا. إن R مولدة بعنصر وحيد 1، والمودولات الجزئية فيه هي الإيديالات. والإديال الأعظمي (يساري، يميني – ثنائي الجانب) في R هو العنصر الأعظمي في مجموعة كل من الإديالات (اليسرى، اليمنى، ثنائية الجانب، على الترتيب). وبذلك نحصل على النتيجة الهامة الآتية.

نظرية 7.2.4 (نظرية كرول): لتكن R حلقة ما. كل إديال خاص في R محتوى في إديال أعظمي. وبشكل خاص، كل حلقة غير تافهة (صفرية) تحوي إديالاً أعظمياً.

البرهان. □

هذه النظرية ذات أهمية عظمى لبرهان وجود واحدات في حلقة R بواحدة 1. في حال عدم وجود واحدة في R، فليس لها معنى.

إن مثنّويّي شرط السلسلة المتزايدة وشرط الأعظمية هما شرطا السلسلة المتناقصة وشرط الأصغرية. لقد عرفنا المودول النيوتري بأنه المودول الذي يحقق أحد الشرطين

المتكافئين: شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.) وشرط الأعظمية (انظر الفرضية 2.1.4)، والمودول الأرتيني هو المودول الذي يحقق شرط السلسلة المتناقصة (الهابطة) (d.c.c.). لنبرهن الآن تكافؤ شرط السلسلة المتناقصة مع شرط الأصغرية.

فرضية 8.2.4: من أجل كل R – مودول M، الشرطان الآتيان متكافئان:

(1) M يحقق شرط السلسلة المتناقصة (d.c.c.)، أي أن M أرتيني.

(2) M يحقق شرط الأصغرية (كل مجموعة من المودولات الجزئية في M تحوي عنصراً أصغرياً).

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): لتكن Γ مجوعة غير خالية من المودولات الجزئية في M. نختار $M_0 \in \Gamma$. إذا لم يكن M_0 أصغرياً في Γ، فإنه يوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث يكون $M_0 \supsetneq M_1$. هذه المناقشة تؤدي إلى السلسة المتناقصة:

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

من المودولات الجزئية في M. بحسب (1) يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$، بحيث يكون $M_{n_0+i} = M_{n_0}$ من أجل كل $i \in \mathbb{N}$، والذي هو عنصر أصغري في Γ.