جامعة الانبار

كلية التربية للعلوم الصرفة

قسم الرياضيات / المرحلة الرابعة

مقرر : مودولات (مقاسات)

المصدر

كتاب البنى الجبرية ٣

(المودولات)

د.محمد حسن الهوشي

منشورات جامعة تشرين

سوريا

المحاضرة الثامنة عشر

في المودولات

(2) $\Leftarrow$ (1): لنفرض أن M لا يحقق شرط (d.c.c.). عندئذ، توجد في M سلسلة متناقصة لانهائية من المودولات الجزئية:

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

عندئذ، أسرة المودولات $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ لا تحوي عنصراً أصغرياً. وهذا تناقض مع (2). □

ملاحظة 9.2.4: من الفرضية 2.1.4، ومن النظرية 2.2.4 معاً نخلص إلى النتيجة الآتية: يكون M R – مودولاً نيوترياً إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة المتكافئة الآتية:

(1) M يحقق شرط السلسلة المتزايدة؛

(2) M يحقق شرط الأعظمية؛

(3) كل مودول جزئي في M منتهي التوليد.

وقد وجدنا أن المودول الأرتيني هو مثّوي المودول النيوتري، بمعنى ما:

المودول النيوتري	المودول الأرتيني
a. شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.)	a′. شرط السلسلة المتناقصة (d.c.c.)
b. شرط الأعظمية.	b′. شرط الأصغرية.
c. كل مودول جزئي منتهي التوليد	c′. كل عامل مودول منتهي التوليد.

لقد برهنا تكافؤ الشرطين a′ و b′ (الفرضية 8.2.4). لنبرهن الآن تكافؤ الشرطين a′ و c′. عندئذ، تصبح الشروط الثلاثة متكافئة.

نظرية 10.2.4: يكون R – مودول M أرتينياً $\Leftrightarrow$ كل عامل مودول M/N منتهي التوليد من أجل كل مودول جزئي N في M.

البرهان: $\Leftarrow$: نفرض العكس، أي نفرض أن M/N غير مولد مجموعة منهية، وليكن $\bar{X}=(\bar{x}_i)_{i\in I}$ أصغر مجموعة مولدة لـ $\bar{M}=M/N$. لتكن $I\supseteq I_n$ مجموعة جزئية مؤلفة من n عنصراً. ليكن:

$$\bar{M}_j=\langle (x_i)_{i\in I-I_j}\rangle$$

عندئذ، نحصل في $\bar{M}=M/N$ على السلسلة المتناقصة اللانهائية:

$$\bar{M}=\bar{M}_0\supsetneq\bar{M}_1\supsetneq\bar{M}_2\supsetneq\cdots$$

ليكن $M_i=\varphi^{-1}(\bar{M}_i)$ الصورة العكسية لـ $\bar{M}_i$ بالنسبة إلى الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi:M\to M/N$. عندئذ، نحصل في M على السلسلة المتناقصة اللانهائية:

$$M=M_0\supsetneq M_1\supsetneq M_2\supsetneq\cdots$$

وغير متقطعة. وهذا يناقض أن M يحقق الشرط (d.c.c.).

$\Rightarrow$: لتكن:

$$M_0\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots \qquad (3)$$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M، وليكن $\bar{M}_i=\varphi(M_i)$، حيث φ هو

الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi : M \to M/N$. عندئذ، نحصل في M على السلسلة المتناقصة:

$$\bar{M}_0 \supseteq \bar{M}_1 \supseteq \bar{M}_2 \supseteq \cdots$$

ولكن $\bar{M}_i = \varphi(M_i) = M_i / N$ منهي التوليد من أجل كل $i \in \mathbb{N}$. نفرض أن $\bar{M}_0$ مولد بـــ m عنصرا. عندئذ، $\bar{M}_k = \langle 0 \rangle$ من أجل كل $m < k$. إذاً، $\bar{M}_k = \langle 0 \rangle$، وبالتالي $M_k = N$ من أجل كل $m < k$، والسلسلة (3) تنقطع. □

نختتم هذا البند بالنظرية الآتية التي تبرهن أن الصفة النيوترية أو الأرتينية تنتقل (تورث) من مودول ما إلى المودولات الجزئية فيه، وإلى عوامل المودولات، وبالعكس.

نظرية 11.2.4: ليكن M R – مودولاً. عندئذ، M يحقق شرط السلسلة (a.c.c. أو d.c.c.) $\Leftrightarrow$ كل مودول جزئي في M وكل عامل مودول لـ M يحقق نفس الشرط.

البرهان: $\Leftarrow$: فيما يتعلق بالمودولات الجزئية في M، الادعاء واضح، لأن المودولات الجزئية في مودولات جزئية في M هي أيضاً مودولات جزئية في M. وفيما يتعلق بعوامل المودول، فإن المطلوب ينتج من نظرية التقابل بين المودولات الجزئية في M والتي تحوي مودولاً جزئياً وبين المودولات الجزئية في عامل المودول بالنسبة إلى هذا المودول الجزئي.

$\Rightarrow$: نعطي البرهان بالنسبة إلى حالة السلسلة المتزايدة، لأن البرهان في حالة السلسلة المتناقصة مشابه.

ليكن N مودولا جزئيا في M، وليكن:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \tag{4}$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، عندئذ:

$$M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \cdots \tag{5}$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في N، و

$$\varphi(M_0) \supseteq \varphi(M_1) \supseteq \varphi(M_2) \supseteq \cdots \qquad (6)$$

سلسلة من المودولات الجزئية في M / N. إن كلا من السلسلتين (5) و (6) تنقطع بالفرض. نفرض أن (5) منقطعة عند الحد $M_r \cap N$ وأن (6) منقطعة عند الحد $\varphi(M_s)$. ليكن $n = \max\{r, s\}$. عندئذ:

$M_{r+i} \cap N = M_r \cap N$ من اجل كل $i \in \mathbb{N}$.

$\varphi(M_{s+j}) = \varphi(M_s)$ من اجل كل $j \in \mathbb{N}$.

عندئذ، بحسب النظرية 5.2.4 (1)، $M_{n+i} = M_n$ من أجل $i \in \mathbb{N}$. إذا، السلسلة (4) تنقطع عند الحد M_n، و M نيوتري. □

إن النظرية 11.2.4 يمكن صوغها بلغة المتواليات كما يلي:

نظرية 11'.2.4: لتكن: $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

متوالية صحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات. عندئذ:

(1) M نيوتري $\Leftrightarrow$ M' و M'' نيوتريان.

(2) M أرتيني $\Leftrightarrow$ M' و M'' أرتينيان.

البرهان: نبرهن (1) فقط، لأن برهان (2) مشابه.

$\Leftarrow$: كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M' (أو في M'') تعطي سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، وبالتالي فهي متقطعة.

$\Rightarrow$: لتكن:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، عندئذ:

$$f^{-1}(M_0) \supseteq f^{-1}(M_1) \supseteq f^{-1}(M_2) \supseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M'، و

$$g(M_0) \supseteq g(M_1) \supseteq g(M_2) \supseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M''، من أجل i كبير بما فيه الكفاية، كلا السلسلتين في M' و M'' تنقطعا، وينتج من ذلك أن السلسلة الأصلية في M منقطعة. □

نتيجة 12.2.4: إذا كانت أسرة المودولات $(M_i)_{i=1}^n$ هي R – مودولات نيوترية (ارتينية) فإن $\oplus_{i=1}^n M_i$ كذلك.

البرهان: نطبق الاستقراء والنظرية 11.2.4 على المتوالية الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \oplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

فنجد المطلوب. □

وهنا يبرز السؤال الهام الآتي: هل نستطيع إعطاء هوية لـــ R – مودولات والتي تحقق شرطي السلسلة معا؟ هذا ما سنناقشه في البند القادم.

4 – 3 المودولات المتفردة

تعريف 1.3.5: ليكن M R – مودولاً مختلفاً عن الصفر:

(1) نقول إن M متفرد إذا لم يحو مودولات جزئية خاصة، أي، إذا لم يحو مودولات جزئية مختلفة عنه وعن $<0>$.

(2) نقول إن M غير قابل للتحليل إذا لم يمكن كتابته بالشكل $M = M_1 \oplus M_2$ من اجل مودولين جزئيين M_1 و M_2 مختلفين عن الصفر، وإلا فإن M قابل للتحليل أو حلول.

(3) يقال إن M قابل للتحليل (حلول) تماماً إذا كان مجموعاً مباشراً لمودولات جزئية متفردة.

إذا كان M R – مودولاً متفرداً و $w \neq 0 \in M$، فإن $M = Rw$. إن $M = Rw = R/\mathrm{Ann}(w)$، ولكي يكون M متفرداً يجب أن يكون $\mathrm{Ann}(w)$ إيديالاً

أعظمياً في R. إذا، كل R – مودول متفرد إيزومرفي إلى $R/\mathfrak{M}$ حيث $\mathfrak{M}$ إيديال أعظمي في R، وبالعكس، فإن R – مودولاً من هذا الشكل يكون متفرداً.

أمثلة 2.3.4:

(1) إذا كان V F – فراغاً شعاعاً فوق الحقل F، فمن أجل كل $V \ni v \neq 0$ تكون المجموعة $Fv = \{\lambda v : \lambda \in F\}$ مودولا متفردا. وبشكل خاص، F هو F – مودول متفرد.

(2) كل زمرة تبديلية A هي $\mathbb{Z}$ – مودول متفرد عندما وفقط عندما تكون رتبة A عدداً بسيطاً.

(3) ليكن F حقلا ما، و $V = F^2$. عندئذ، V هو $F[x]$ – مودول بالنسبة إلى الإندومرفيزم T، حيث $T(u_1, u_2) = (u_1, 0)$. إن V هو $F[x]$ – مودول دوري، لكن ليس $F[x]$ – مودولاً متفرداً. إن $V = F[x](0.1)$. لكن $N = \langle (u, 0) \rangle$، $F \ni u$، هو مودول جزئي في V.

(4) ليكن $V=R^2$ و $T\in End_F(V)$ حيث $T(u,v)=(-v,u)$، عندئذ، $F[x]$ – مودول V_T متفرد. من أجل بيان ذلك، نأخذ $w=(u_1,v_1)$ من V حيث $w\neq 0$. ليكن $N=\langle w\rangle$ مودولاً جزئياً في V_T. عندئذ، $w\in N$ و $xw=T(u_1,v_1)=(-v_1,u_1)$ من N. بما أن كل عنصر $(x,y)\in V$ يمكن كتابته بالشكل $\alpha w+\beta xw$ حيث:

$$\beta=(yu_1+xv_1)/(u_1^2+v_1^2) \quad \text{و} \quad \alpha=(xu_1+yv_1)/(u_1^2+v_1^2)$$

فإن $N=V_T$ و V_T متفرد.

(5) ليكن $V=\mathbb{C}^2$ و $T\in End_F(V)$ حيث $T(u,v)=(-v,u)$. إن $\mathbb{C}[X]$ – مودول V_T ليس متفرداً. لأن الفراغ الجزئي $\mathbb{C}(i,1)$ هو فراغ جزئي في V، لا متغير بالنسبة إلى T. إذا هو $\mathbb{C}[X]$ – مودول جزئي في V_T مختلف عن $\langle 0\rangle$ وعن V_T.

فرضية 3.3.4: إذا كان R – مودولاً متفرداً، فإنه دوري.

البرهان: إذا كان $M\neq\langle 0\rangle$ نأخذ $M\ni x\neq 0$. عندئذ، $N=\langle x\rangle\neq\langle 0\rangle$

و $N = M$ لأن M متفرد. □

إن عكس هذه النتيجة ليس صحيحاً دائماً كما يتضح من المثال (3) أعلاه. إنه صحصح ضمن شروط كما ينضح من الفرضية الآتية.

فرضية 4.3.4: يكون R – مودول دوري $M = \langle m \rangle$ متفرداً عندما وفقط عندما يكون $\mathrm{Ann}(m)$ إيديالاً أعظمياً في R.

البرهان: من أجل كل $a \in R$ يكون التقابل $a \mapsto am$ إيبيمورفيزماً من R على M نواته $\mathrm{Ann}(m)$. إذاً، $R/Ann(m) \cong M$. بحسب نظرية التقابل، M متفرد $\Leftrightarrow$ $R/Ann(m)$ متفرد $\Leftrightarrow$ $R/Ann(m)$ حقل $\Leftrightarrow$ $Ann(m)$ إيديال أعظمي في R. □

إن الفرضية الآتية سهلة للغاية لكنها مهمة للغاية أيضاً.

فرضية 5.3.4 (ليمّاشور):

(1) ليكن M R – مودولاً متفرداً. عندئذ، $\mathrm{End}_R(M)$ حلقة قسمة.

(2) ليكن M و N R – مودولين متفردين. عندئذ:

$$M \cong N \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$$

البرهان: (1): ليكن $f \neq 0 \in \mathrm{End}_R(M)$. عندئذ، $\mathrm{Im}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن $\langle 0 \rangle$. إذا، $\mathrm{Im}(f) = M$ لأن M متفرد. كما أن $\mathrm{Ker}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن M، لأن $f \neq 0$. إذا، $\mathrm{Ker}(f) = \langle 0 \rangle$ لأن M متفرد أيضاً. إذا، f هو R – أفتومرفيزم.

(2) بنفس طريقة المناقشة كما في (1)، كل R – هومومرفيزم غير صفري $f : M \to N$ هو R – إيزومرفيزم. □

إن الفرضية السابقة تنتج من النظرية التالية والتي تبين كيفية تأثير الهومومرفيزمات في حال غياب المودولات الجزئية.

نظرية 6.3.4: ليكن M و N R – مودولين و $f:M\to N$ هومومرفيزم R – مودولات غير صفري. عندئذ:

(1) إذا كان M متفرداً، فإن f مونومرفيزم.

(2) إذا كان M متفرداً، فإن f إيبيمورفيزم.

البرهان: (1): إن $\mathrm{Ker}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن M لأن $f\neq 0$. إذاً، $\mathrm{Ker}(f)=\langle 0\rangle$ لأن M متفرد. إذاً، f مونومرفيزم.

(2): إن $\mathrm{Im}(f)$ مودول جزئي في N مختلف عن $\langle 0\rangle$ لأن $f\neq 0$. إذا، لأن M متفرد. إذا $N=\mathrm{Im}(f)$ لأن N متفرد، إذاً، f إيبيمورفيزم. □

نظرية 7.3.4: ليكن F حقلا و V F – فراغاً شعاعاً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) $\dim_F(V)$ محدود؛

(2) V F – مودول نيوتري؛

(3) V F – مودول أرتيني.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2) و (1) $\Leftarrow$ (3): نفرض أن $\dim_F(V)=n$ من أجل كل فراغ جزئي U في V، لدينا $n \geq \dim_F(U)$. وإذا كان U و W فراغين جزئيين في V حيث $U \subsetneq W$، فإن $\dim(U) < \dim(W)$. وينتج من ذلك أن سلسلة منهية من الفراغات الجزئية في V:

$$U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \cdots$$

يجب أن تحقق العلاقة $t \leq n$. إذا، V هو F – مودول نيوتري و F – مودول أرتيني.

(2) $\Leftarrow$ (1) و (3) $\Leftarrow$ (1): نفرض العكس، أي نفرض أن V غير محدود القياس فوق F. عندئذ، توجد أسرة لانهائية $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ بحيث تكون $(v_i)_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً من أجل كل $n\in\mathbb{N}$. ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$ نأخذ:

$$W_n=\sum_{i=n+1}^{\infty} Fv_i \quad \text{و} \quad U_n=\sum_{i=1}^{n} Fv_i$$

إذاً، U_n فراغ جزئي في V و $\dim_F(U)=n$. بما أن:

$$U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_n \subsetneq U_{n+1} \subsetneq \cdots$$

فإن F ليس F – مودولاً نيوترياً، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$\cdots \subsetneq W_{n+1} \subsetneq W_n$$

سلسلة متناقصة من الفراغات الجزئية في V، غير منقطعة. إذاً، V ليس F – مودولاً أرتينياً. تناقض.

□