الاحداثيات المعممة ومعادلات لاكرانج
Generalized Coordinates and Lagranges Equations

تعتبر المعادلة F= m a معادلة اتجاهية تكافيء ثلاث معادلات يحصل عليها من تحليل المتجهات على طول ثلاثة محاور ، أي ان:

$$f_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad f_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad f_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \quad \ldots\ldots(15)$$

حيث x , y , z تمثل الاحداثيات الديكارتية للجسيم الذي كتلته m ، اما f_x , f_y , f_z فتمثل المركبات الثلاثة للقوة الكلية المسلطة على الجسيم. يمكن التعبير عن قوانين نيوتن للجسيمات المتبقية بالمعادلة:

$$f_i = m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

وللتعبير عن التغيير في الاحداثيات x بدلالة التغيير في الاحداثيات المعممة q بواسطة العلاقة:

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ولنفرض ان النظام قد عرض الى إزاحة متناهية الصغر في الاحداثيات ، ففي هذه الازاحة ، سوف تنجز القوى كمية من الشغل تمثل كالاتي:

$$d\,W = \sum_i f_i\,dx_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

وبالتعويض عن dx_i من معادلة 17 يمكننا ان نكتب

$$d\,W = \sum_i \sum_j f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j Q_j\,dq_j \quad \ldots\ldots\ldots(19)$$

حيث ان Q_j تمثل القوة المعممة المرتبطة بالاحداثيات المعممة q_j ، ويمكن تمثيلها كالاتي:

$$Q_j = \sum_i f_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \ldots\ldots\ldots(20)$$

وبعد التعويض عن f_i ، من معادلة 16 وقيمة dx_i من معادلة 17 يمكن ان يكتب الشغل المنجز بالشكل التالي:

$$d\,W = \sum_i m_i\frac{d^2\,x_i}{dt^2}\,dx_i = \sum_i \sum_j m_i\frac{d^2\,x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\,d\,q_j \quad \ldots\ldots(21)$$

وعند ربط المعادلتين 19 و 21 نحصل على :

$$\sum_i \sum_j m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_i = \sum_j Q_j \ dq_j \quad \dots\dots\dots (22)$$

ان المعادلة الأخيرة تكون صحيحة فقط اذا كانت معاملات كل $d\, q_j$ على طرفي المعادلة متساوية ولا توجد علاقة بين تفاضلاتها وبذلك:

$$\sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \dots\dots (23)$$

وبالتبسيط للطرف الايسر لطائفة j وتطبيق التفاضل للدالة الضمنية نحصل على:

$$\frac{d\, x_i}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{d\, q_j}{dt} \quad \dots\dots\dots (24)$$

وعند اجراء تفاضل نسبة الى $\dot{q}_k$ حيث ان $\ddot{q}_k = \frac{d\, q_k}{dt}$ نحصل على

$$\frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \dots\dots\dots \quad (25)$$

ويمكننا الحصول على علاقة أخرى وهي:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \quad \dots\dots\dots (26)$$

والان نكتب الطرف الايسر لمعادلة 23 قيم Q السابقة:

$$\sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \sum_i m_i \frac{d\, x_i}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} (27)$$

وبأستخدام المعادلتين 25 و 26 نحصل على :

$$\sum_i m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial qi} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\left(\frac{d\, x_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - \sum_i m_i \frac{d\, x_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\, x_i}{dt}\right)^2\right]\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\, x_i}{dt}\right)^2\right] \dots (28)$$

بما ان الطاقة الحركية للنظام هي $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\, x_i}{dt}\right)^2$ وبهذا تصبح طائفة j من معادلات 23 بالصيغة الاتية:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \ \dots\dots \ (29)$$

اذا كانت القوى f_i مشتقة من دالة جهد $V_{(x_1 \dots\dots x_{3N})}$ بحيث ان:

$$f_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots..(30)$$

فعندئذ يمكن كتابة معادلة 20 بالشكل التالي:

$$Q_i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad \dots\dots.\ (31)$$

وفي هذه الحالة بالذات (وهي الحالة الأكثر أهمية) ، تصبح المعادلة 29 كالاتي:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(T - V) = 0 \quad \dots\dots\dots..\ (32)$$

وبما ان V هي دالة للاحداثيات فقط ، فأن هذه المعادلة يمكن تبسيطها بصورة اكثر وذلك بدلالة استخدام الدالة $L = T - V$ ، وعندئذ تصبح المعادلة 32 كالاتي :

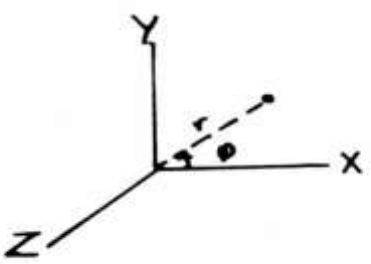
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

وتدعى الدالة L بدالة لاكرانج *Lagrangian function* للنظام. وان طائفة المعادلات المتمثلة بالمعادلة 32 تدعى بمعادلات لاكرانج للحركة.

مثال : يتحرك جسيم ذو كتلة m في مستو تحت تأثير جهد ، وهذا الجهد هو دالة فقط لبعد الجسيم عن نقطة ثابتة في المستوى. ناقش حركة الجسيم مستخدما معادلات لاكرانج؟

الحل: لتكن النقطة الثابتة مركزا للاحداثيات وان r تمثل بعد الجسيم من النقطة الثابتة ، وأيضا θ تمثل الزاوية بين محور x والخط الواصل بين المركز الاحداثي والجسيم. ان العلاقة بين النظامين الاحداثيين يمكن التغيير عنها كالاتي:

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$



وتكون الطاقة الحركية للجسيم T كالاتي

$$T = \frac{1}{2}\, m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, m \left[\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\, \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\, \frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\, m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]$$

واذا عبرنا عن طاقة الجهد $V_{(r)}$ فيمكننا عندئذ كتابة دالة لاكرانج بالشكل التالي:

$$L = \frac{1}{2}\, m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] - V_{(r)}$$

او تكتب بالشكل:

$$L = \frac{1}{2}\, m \left[(r)^2 + r^2\, (\theta)^2 \right] - V_{(r)}$$

وتكون معادلات لاكرانج للحركة:

$$\left(\frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d}{dt}\, m\, r\right) - \left(m\, r\, \theta^2 - \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r}\right) = 0$$

او تكتب بالشكل

$$m\, \frac{d^2\, r}{dt^2} - m\, r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} = 0$$

وبما ان الزخم الزاوي P_θ للجسيم حول نقطة ثابتة يساوي:

$$P_\theta = m\, r^2\, \frac{d\theta}{dt}$$

وعليه

$$m\, \frac{d^2\, r}{dt^2} - \frac{P^2{}_\theta}{m\, r^3} + \frac{\partial V_{(r)}}{\partial r} = 0$$

ان الحد الثاني في هذه المعادلة يمثل القوة المركزية.