الزخم المعمم ومعادلات هاملتون في الحركة

Generalized Momentum and Hamilton's Equations of Motion

من الملائم في كثير من المسائل ان نعبر عن الطاقة الحركية بدلالة الزخم بدلاً من السرعة. ولاحداثيات معممة ، نعرف الزخم P_i المرتبط بالاحداثي q_i بالصيغة التالية :

$$P_i = \frac{\partial\, L}{\partial\, \dot{q}_i} \;\ldots\ldots\ldots\; (35)$$

ولكي نجد قوانين الحركة بدلالة الزخوم P_i والاحداثيات q_i بدلاً من تلك الناتجة بدلالة الاحداثيات q_i والسرع $\dot{q}_j$ ، نأخذ المعادلة التفاضلية الاتية:

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\, dq_i \right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots 36$$

حيث ان معامل $d\dot{q}_i$ يمثل P_i كما هو مذكور في التعريف المذكور انفاً. ومن معادلات لاكرانج 33 وبالاستعانة بمعادلة 35 نحصل على:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} = \frac{d}{dt} P_i = \dot{P} \quad \ldots\ldots\ldots..\; 37$$

وعندئذ يمكن كتابة معادلة 36 بالشكل التالي

$$dL = \sum_i (P_i\, d\dot{q}_i + \dot{P}_i\, dq_i) \;\ldots\ldots 38$$

اذا طرحنا معادلة 38 من المتطابقة التالية:

$$d\left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i\right) = \sum_i (P_i\, d\dot{q}_i + \dot{q}_i\, dp_i) \quad \ldots\ldots\ldots..\; 39$$

سوف نحصل على:

$$d\left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i - L\right) = \sum_i (q_i\, dp_i + \dot{p}_i\, dq_i) \quad \ldots\ldots\ldots..\; 39$$

ان الكمية $\sum_i p_i\, \dot{q}_i - L$ تدعى بدالة هاملتون للنظام ويشار لها عادة بالرمز $\mathfrak{R}$ (ويستخدم أحيانا الرمز H ليشير لدالة هاملتون) أي ان:

$$\mathfrak{R} = \sum_i p_i\, q_i - L \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 41$$

فأذا اعتبرت $\mathfrak{R}$ دالة للزخوم $\dot{P}_s$ والاحداثيات $\dot{q}_s$ ، عندئذ نحصل من معادلة 40 على:

$$d\,\mathfrak{R} = \sum_i (\dot{q}_i\, dp_i - \dot{p}\, dq_i)$$

وبتطبيق تعريف التفاضل الجزئي على هذه المعادلة نحصل على:

$$\frac{\partial \Re}{\partial p_i} = q_i \quad , \quad \frac{\partial \Re}{\partial q_i} = p_i \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 42$$

وتدعى هذه المجموعة من المعادلات بمعادلات هاملتون للحركة. ان الدالة الهاملتونية لنظام محافظ تمتلك ميزة مهمة هي انها تكافيء الطاقة الكلية للنظام ، ولاثبات ذلك نتبع ما يلي:

عند التعويض عن $L = T - V$ في معادلة 41 نحصل على:

$$\Re = \sum_i p_i\, \dot{q}_i - T + V \quad \dots\dots\dots\dots. \quad 43$$

وبالاستعانة بمعادلة 35 تصبح معادلة 43 كالاتي:

$$\Re = \sum_i \dot{q}_i\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - T + V \quad \dots\dots\dots\dots\dots. \quad 44$$

وبما ان للأنظمة المحافظة يكون جميع اعتماد L على q هو في الحد T عندئذ تكتب معادلة 44 بالشكل التالي:

$$\Re = \sum_i q_i\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - T + V \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 45$$

ان الحد الأول في معادلة 45 يساوي $2\,T$ ، ولاثبات ذلك نأخذ مثالاً جسيما مجبرا على الحركة في اتجاه واحد ، وتكون الطاقة الحركية لاحداثيات ديكارت هي:

$$T = \frac{1}{2}\, m\, \dot{q}^2_i$$

ومنها يكون

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\, \dot{q}_i$$

وكذلك

$$\dot{q}_i\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m\, \dot{q}_i^2 = 2\,T$$

اما بالنسبة لنظام متعدد الجسيمات ومتعدد الابعاد فأن الطاقة الحركية (مستخدمين احداثيات ديكارتية) هي $T = \frac{1}{2} \sum m_i\, \dot{q}_i^2$ ، وبأتباع نفس الطريقة المتبعة انفاً سنصل الى ان:

$$\sum_i \dot{q}_i\, \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T$$

وبتعويض هذه النتيجة في معادلة 45 نحصل على:

$$\Re = 2\,T - T + V = T + V \quad \dots\dots\dots\dots \quad 46$$

وبهذا نرى ان الدالة الهاملتونية تطابق الطاقة الكلية للنظام.

مثال: لنأخذ مسألة الحركة التوافقية البسيطة التي ناقشناها سابقا: ونكتب أولا الكميات المناسبة لهذه المسألة كالاتي:

$$q_i = x \quad , \quad \dot{q}_i = \dot{x} \quad , \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

ونكتب ثانياً دالة لاكرانج كما يلي:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

ومنها يكتب الزخم كالاتي:

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$$

والان تصبح T بدلالة الزخم كالتالي:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{P_x}{m}\right)^2 = \frac{1}{2m} P_x^2$$

وتكون الدالة الهاملتونية عندئذ:

$$\Re = T + V = \frac{1}{2m} P_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$