مفردات المنهج:-

1. الفصل الاول :- الأساسيات:- Fundamentals
2. الفصل الثاني:- عرض البيانات الإحصائية Presentation of Statically Data
3. الفصل الثالث:- مقاييس النزعة المركزية Measurement of Central Tendency
4. الفصل الرابع:- مقاييس التشتت والاختلاف Measurement of Dispersion and Variation.
5. الفصل الخامس:- مبادئ نظرية الاحتمالية Elementary probability theory
6. الفصل السادس:- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Discrete Probability Distribution
7. الفصل السابع:- التوزيعات الاحتمالية المتصلة Continuous Probability Distribution
8. الفصل الثامن:- نظرية المعاينة:- Sampling Theory
9. الفصل التاسع:- نظرية التخمين:- Estimation Theory
10. الفصل العاشر:- نظرية القرار الإحصائي:- Statically Decision Theory .

الفصل الأول

الأساسيات Fundamentals

علم الإحصاء : هو ذلك العلم الذي يعمل على استخدام الأسلوب العلمي في طرق جمع البيانات وتبويبها وتلخيصها وعرضها وتحليلها بهدف الوصول منها على استنتاجات وقرارات مناسبة ويقسم الى قسمين :

1. إحصاء وصفى descriptive statistics ويشتمل على جمع وتبويب البيانات.
2. الإحصاء الاستدلالي inferential statistics فأنه يعني الاستدلال في النتائج في اتخاذ القرار.

المصطلحات الإحصائية:

١. المتغيرvariable: هو أي ظاهرة تظهر اختلافات بين مفرداتها ويرمز لها برمز y أو أي رمز آخر x ، z .... وهو إما متغير وصفي Descriptive Variable أو متغير كمي Quantitative Variable وتكون على نوعين:

أ – متغير مستمر Continue Variable ويأخذ قيمة مدى من الأعداد الحقيقية على سبيل المثال أطوال الطلاب تتراوح بين (١٣٠ سم إلى ١٧٠ سم) أي $130 < Y < 170$

ب – متغير منفصل Discrete variable ويأخذ قيمه المتغير فيه قيم غير متصل ومنفصلة او منقطعة على سبيل المثال عدد أفراد الأسرة هي $Y=2,3,5,10$.

٢. **المتغيرات المستقل والتابع: - Independent and Dependent Variables**

$P= б*A$

P = القوة (dependent)

A = المساحة (constant)

Б = الإجهاد (independent)

٣. **العينة Sample** :عبارة عن مجموعة من المشاهدات اختيرت بطريقة ما من المجتمع.

٣،١. العينة العشوائي (Random Sample) إذا أعطي كل عنصر من مكونات المجتمع نفس الفرصة بالاختيار.

٣،٢. عينات مستقلة (Independent sample)إذا تم اختيارها بصورة عشوائية أي كل واحدة منها عينة عشوائية.

٤. ***المجتمع Population*** :عبارة عن جميع القيم والمفردات التي يمكن ان يأخذها المتغير.

الرموز الإحصائيةStatistics notations :

١. $\sum yi$ حرف إغريقي يدعى sigma ويمثل مجموع الأرقام للمتغير Summation of y والرقمان i & n هما حدي المجموع.

$$\sum yi = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

٢. $\sum y_i^2$ مجموع مربعات المشاهدات

$$\sum y_i^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2$$

٣. $(\sum y_i)^2$ مربع مجموع المشاهدات

$$(\sum y_i)^2 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^2$$

٤. $\sum y_i * x_i$ مجموع حاصل ضرب متغيرين.

$$\sum y_i * x_i = y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3+y_4x_4+y_5x_5$$

٥. $(\sum y_i)(\sum x_i)$ حاصل ضرب مجموع قيم متغيرين.

$$(\sum y_i)(\sum x_i) = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

٦. قواعد بعض عمليات الجمع:-

- $\sum C = nc$ حيث c ثابت.
- $\sum cy_i = c\sum y_i$ حيث c ثابت y_i = متغير.

مثال:- اذا علمت ان قيم كل من X , Y على النحو التالي:

$Y_i = 3,9,6,2$ $X_i = 2,6,3,1$

اوجد مايلي :-

١) $\sum (y_i * x_i)^2$ ٢) $\sum (y_i-5)(x_i-3)$ ٣) $\sum y_i - \{(\sum y_i)^2\}/n$

الحل:-

1) $\sum(yi*xi)^2 =(y_1x_1)^2+(y_2x_2)^2+(y_3x_3)^2+(y_4x_4)^2+\ldots\ldots.$

$= (3-2)^2+(9-6)^2+(6-3)^2+(2-1)^2= 20$

(2) & (3) H.W.

الفصل الثاني

عرض البيانات

Presentation of Data

يتناول هذا الفصل طرق عرض البيانات الأولي (Raw Data) بصورة مركزة لتوضيح توزيع وانتشار هذه البيانات ومن اجل إعطاء صورة افضل للبيانات تمثل أما برسم بياني (Graph) أو تنظيم جدولي (Tables) لتوضيح العلاقة بين المتغيرات ويكون أما خارطة (Chart) أو مخطط (Diagram) .

***١ - العرض الجدولي :* Tabular Presentation**

أ- جدول التوزيع التكراري:- Frequency Distribution Table

هو جدول بسيط يتكون من عمودين

الأول: وتقسم فيه قيم المتغير إلى أقسام أو مجموعات تدعى بالفئات Classes

الثاني: يبين مفردات كل فئة ويسمى التكرار Frequency

وهناك حالتين في هذا الجدول :

أ-البيانات الغير مبوبة : وهي البيانات الأصلية التي جمعت ولم تبوب أي ليس لها تكرارات.

ب- البيانات المبوبة : وهي البيانات الأصلية التي جمعت وتم تبويبها في جدول توزيع.

تعاريف :

١- الفئات: Classes

هي المجاميع التي قسمت إليها قيم المتغير وكل فئة تأخذ مدى معين من قيم المتغير.

٢- حدود الفئات Classes Limits

وهي حد أدنى وحد أعلى وحد أدنى حقيقي وحد أعلى حقيقي.

٣- طول الفئة: Class Length

وهو مقدار المدى بين حدي الفئة ويستحسن أن يكون طول الفئات متساوي.

٤- مركز الفئة Class Mark or Class Mid-point

وهو عبارة عن منتصف المدى بين حدي الفئة.

٥- تكرار الفئة Class Frequency

وهي عدد المفردات أو القيم التي تقع في مدى تلك الفئة ويرمز لها fi .

الخطوات العامة في إنشاء جداول التوزيع التكراري :

١ – استخراج المدى Range

المدى = (أعلى قيمة – اقل قيمة)

R= Max value – Min value

٢ – اختيار وتحديد عدد الفئات Number Of Class

هناك عدة طرق منها طريقة بول حيث ان:

عدد الفئات(N) =٢,٥ × (R)^١/٤^

وعلى العموم فأنها تتراوح بين ٥ الى ٢٥ فئة ويكون للخبرة دور في تحديدها.

٣ – طول الفئة Class Length

طول الفئة = المدى / عدد الفئات (L=R/N)

تقرب إلى أقرب عدد صحيح اكبر.

٤ – حدود الفئات Class Limit

يجب أن تكتب حدود الفئات بحيث أن جميع قيم المتغير تقع بين الحد الأدنى للفئة الأولى والحد الأعلى للفئة الأخيرة.

الحد الأدنى الحقيقي = مركز الفئة – ٠,٥ طول الفئة

الحد الأعلى الحقيقي = مركز الفئة + ٠,٥ طول الفئة

٥ – استخراج عدد التكرارات لكل فئة Class Frequency

وذلك بتسجيل القيمة الأصلية واحدة بعد الأخرى في الفئة الخاصة بها بحيث يكون مجموع التكرارات لكل فئة يساوي المجموع الكلي للمشاهدات.

مثـــــــــال:

البيانات التالية تشمل سرع ١٠٠ المركبة مقاس إلى اقرب ١ كم / ساعة على أحد الطرق الخارجية:

37 61 76 40 54 74 37 48 47 53 40 63 63 68 57 55 59 60 64 67 65 87 74 51 54 57 59
58 56 52 54 82 51 50 54 51 55 32 46 56 50 50 66 84 59 57 67 47 73 76 67 46 41 44
43 50 61 71 55 51 62 54 53 60 63 40 61 45 45 70 57 53 65 61 55 41 77 56 64 52 69
48 68 73 72 78 71 53 65 58 70 70 60 55 46 36 50 59 62 42.

الحـــــل/

- المدى = الحد الاعلى - الحد الادنى = 87 -32 = 55
- عدد الفئات = يكون 12 فئة (من الخبرة)
- طول الفئة = المدى / عدد الفئات = 55 / 12 = 4.6 = 5 أو = 4
- حدد الفئات : يكون الحد الادنى للفئة الاولى أقل من أقل قرأة بدرجة واحدة = 31

الحد الاعلى للفئة الاولى = 31 + طول الفئة = 31 + 4 = 35

الفئة الاولى = 35 -٣١

الفئة الثانية = 40 -٣٦ وهكذا

جدول التوزيع التكراري للمركبات

الفئات	التكرارات fi	مراكز الفئات yi	الحدود الحقيقية	التكرار النسبي Pi	التكرار المئوي Pi %	فئة التكرار التصاعدي	Fi	فئة التكرار التنازلي	Fi
31-35	1	33	30.5-35.5	0.01	1	اقل من 31	0	اكثر من ٣١	١٠٠
36-40	5	38	35.5-40.5	0.05	5	اقل من ٣٦	1	اكثر من ٣٦	99
41-45	7	43	40.5-45.5	0.07	7	اقل من ٤١	٦	اكثر من ٤١	94
46-50	12	48	45.5-50.5	0.12	١٢	اقل من ٤٦	13	اكثر من ٤٦	87
51-55	20	53	50.5-55.5	0.2	20	اقل من ٥١	٢٥	اكثر من ٥١	75
56-60	17	58	55.5-60.5	0.17	17	اقل من ٥٦	45	اكثر من ٥٦	55
61-65	14	63	60.5-66.5	٠,١٤	١٤	اقل من ٦١	62	اكثر من ٦١	38
66-70	10	68	65.5-70.5	0.1	10	اقل من ٦٦	76	اكثر من ٦٦	24
71-75	7	73	70.5-75.5	0.07	7	اقل من ٧١	86	اكثر من ٧١	14
76-80	4	78	75.5-80.5	0.04	4	اقل من ٧٦	93	اكثر من ٧٦	7
81-85	2	83	80.5-85.5	0.02	2	اقل من ٨١	97	اكثر من ٨١	3
86-90	1	88	85.5-90.5	0.01	1	اقل من ٩٠	99	اكثر من ٩٠	1
						اقل من ٩١	100	اكثر من ٩١	0
المجموع	100			1	100				

- مراكز الفئات y_i = (الحد الأعلى + الحد الأدنى)/٢
  y_i للفئة الأولى = (٣٥+٣١)/٢ =٣٣
- الحد الأعلى الحقيقي = (الحد الأعلى لتلك الفئة + الحد الأدنى للفئة التي تليها) /٢
  الحد الادنى الحقيقي = (الحد الأدنى لتلك الفئة+ الحد الأعلى للفئة السابقة) /٢
- التكرار النسبي Relative frequency او الاحتمالي (Pi) Probability :-
  التكرار النسبي لأي فئة هو نسبة تكرار تلك الفئة إلى التكرار الكلي ويعبر عنه بنسبة مئوية.
  تكرار الفئة / مجموع التكرارات = التكرار النسبي

$Pi=fi/n$
$\sum Pi=0.1$

- ***التوزيع التكراري التراكمي (التجميعي) Cumulative Frequency Distribution***
  وهو يوضح عدد القراءات (التكرارات) الأقل من قيمة معينة (less than) ويطلق علية التوزيع التراكمي صاعد أو يوضح عدد القراءات (التكرارات) الأكبر من قيمة معينة (greater than) فيطلق علية توزيع تراكمي نازل.

ب:- التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية:-

١ . *المدرج التكراري Histogram*

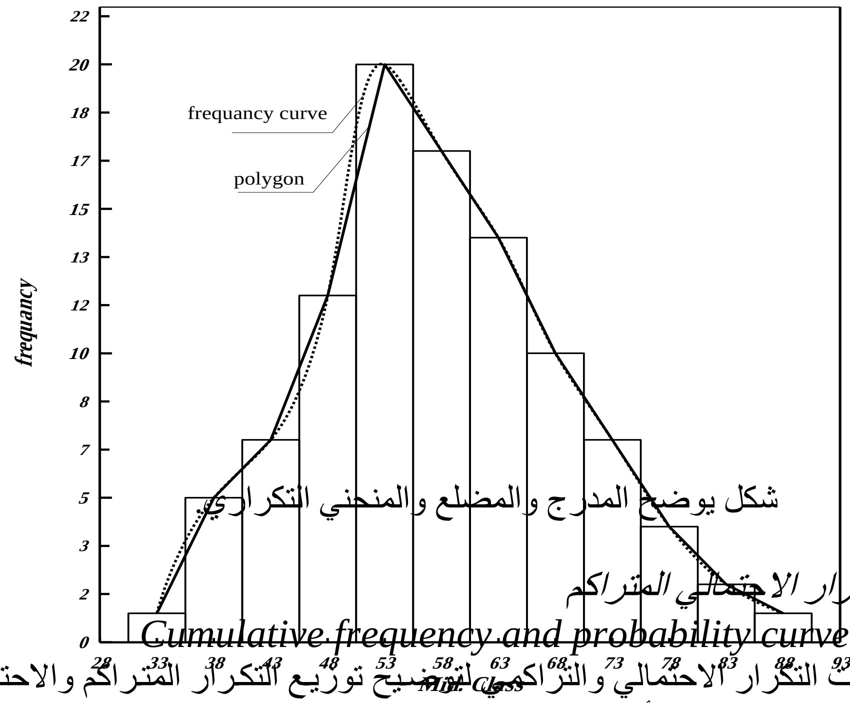
وهو مخطط بياني يوضح نمط تغير التكرارات (f(xi)) أو الاحتمال (Pi) مع قيم المتغير الإحصائي (xi) الذي يشمل مراكز الفئات وتمثل كل فئة بمستطيل قاعدته في الأسفل وارتفاعه قيمة التكرار.

٢ . *المضلع التكراري Polygon*

يوضح هذا المضلع نمط تغير التكرارات او الاحتمالات مع قيم المتغير الإحصائي ويمثل بخطوط مستقيمة تصل بين الزوج المرتب الذي يمثل مركز الفئة والتكرار (xi , fi) ويمثل الخطوط المستقيمة الواصلة بين مراكز المستطيلات أعلاه.

٣ . *المنحني التكراري Frequency curve*

يمكن الاستعاضة عن الخطوط المتكسرة بالمضلع التكراري بمنحني يمر بنقاط مراكز الفئات والتكرارات.

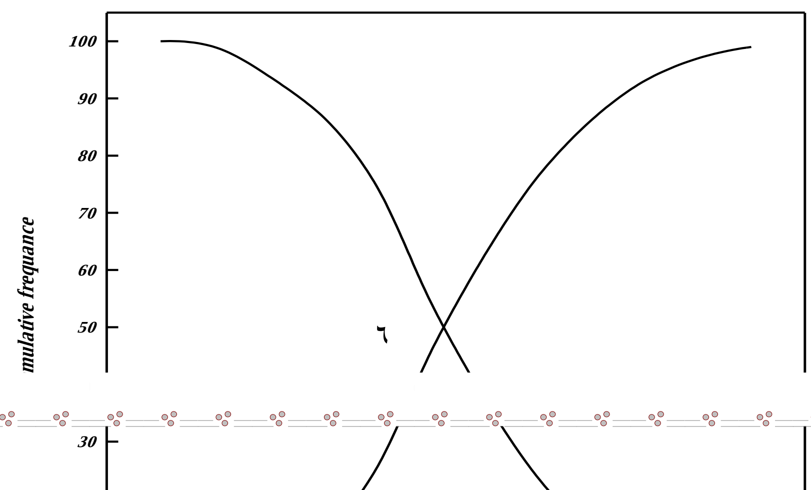


شكل يوضح المدرج والمضلع والمنحني التكراري

٤ . *منحني التكرار الاحتمالي المتراكم*

Cumulative frequency and probability curve

تستخدم منحنيات التكرار الاحتمالي والتراكمي لتوضيح توزيع التكرار المتراكم والاحتمال المتراكم بيانيا وهذه المنحنيات تأخذ شكل (S) ويمثل بشكل منحني يصل بين مراكز الفئات والتكرار التراكمي عند تلك العينة.



شكل يوضح المنحني التكراري التجميعي التصاعدي والتنازلي.

الفصل الثالث

مقاييس النزعة المركزية

Measurement of Central Tendency

هي تلك المقاييس التي تبحث في تقدير قيمة تتمركز حولها أغلبية هذه البيانات وان هذه القيمة المتوسطة او المتمركزة هي رقم واحد يعبر عن أو يمثل جميع بيانات تلك المجموعة واهم مقاييس التوسط هي: -

١- الوسط الحسابي Arithmetic Mean
٢- الوسط الهندسي Geometric Mean
٣- الوسط التوافقي Harmonic Mean
٤- الوسيط Median
٥- المنوال Mode

وهنك حالتين من البيانات:-

أ- بيانات غير مبوبة
ب- بيانات مبوبة

١ - الوسط الحسابي Arithmetic Mean

أ- البيانات الغير مبوبة

اذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1,y_2,y_3,\ldots..y_n$ فان حاصل قسمة مجموعة تلك المشاهدات على عددها يسمى بالوسط الحسابي ويرمز له ($\bar{Y}$).

$$\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\Sigma y_i= y_1+y_2+y_3+\ldots.+y_n$

مثال: إذا علمت أن معدل مقاومة خمسة مكعبات من الخرسانة بعمر سبعة أيام على النحو التالي أوجد معدل تلك المقاومة؟

$y_i=18,18.5,17.5,19,20$

الحل:

$$\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\Sigma y_i= y_1+y_2+y_3+\ldots.+y_n$

$\Sigma y_i/n=(18+18.5+17.5+19+20)/5$

$\bar{Y}=18.6$

ب-البيانات المبوبة

إذا كان لدينا المشاهدات $y_1,y_2,y_3,\ldots..y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $f_1,f_2,f_3,\ldots..f_n$ على التوالي فان حاصل قسمة مجموع حاصل ضرب مركز الفئة في التكرار مقسوم على مجموع التكرارات يسمى بالوسط الحسابي.

$$\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \times f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

٢- الوسط الهندسي Geometric Mean

أ-البيانات الغير مبوبة

اذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1,y_2,y_3,\ldots..y_n$ فان الوسط الهندسي لها (G^-).

$$\bar{G} = \sqrt[n]{(y_1)(y_2)(y_3)\ldots\ldots(y_n)}$$

$$\log\bar{G} = \frac{1}{n}\log[(y_1)(y_2)(y_3)\ldots\ldots(y_n)]$$

مثال: إذا كان معدل النمو البشري في دولة معينة خلال كل عشرة سنوات هي على النحو التالي ١,٠٥، ١,٠٧، ١,١، ١,١٣ فما هو معدل النمو خلال الأربعون سنة الماضية؟

$$\bar{G} = \sqrt[n]{(y_1)(y_2)(y_3)\ldots\ldots(y_n)}$$

$G^- = (1.05x1.07x1.1x1.13)^{1/4} =$

ملاحظة: -الوسط الهندسي يتعامل عموما في كل أمر له علاقة بالنمو سوأ كان نمو اقتصادي او بشري أو زيادة في إشعاع وصلابة.... الخ.

ب-البيانات المبوبة: -

أذا كان لدينا المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots..y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها المشاهدات $f_1,f_2,f_3,\ldots..f_n$ على التوالي فالوسط الهندسي لها هو:-

$$\bar{G} = \sqrt[\sum f_i]{(y_1)^{f_1}(y_2)^{f_2}\ldots\ldots\ldots\ldots(y_n)^{f_n}}$$

$$\bar{G} = \left[(y_1)^{f_1}(y_2)^{f_2}\ldots\ldots\ldots(y_n)^{f_n}\right]^{\frac{1}{\sum fi}}$$

$$\log\bar{G} = \frac{1}{\sum f_i}[f_1\log y_1 + f_1\log y_1 + \ \ldots\ldots\ldots + f_n\log y_n]$$

٣- الوسط التوافقي Harmonic Mean

أ-البيانات الغير مبوبة

إذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots..y_n$ فان الوسط التوافقي لها (H^-).

$$\bar{H} = \frac{1}{\frac{\left(\sum\left(1/y_i\right)\right)}{n}} = \frac{n}{\sum\frac{1}{y_i}}$$

أي أن الوسط التوافقي يساوي مقلوب الوسط الحسابي لمقلوب القيم او المشاهدات.

مثال :- مركبة تقطع ١٠ كم بمعدل ٣٠ كم/ساعة وتقطع ١٠ كم بمعدل ٤٠ كم/ساعة أيضا وتقطع ١٠ كم بمعدل ٥٠كم/ساعة ما معدل تغير ما تقطع المركبة (السرعة)؟.

الحل:-

ا-الطريقة الأولى:-

زمن المرحلة الأولى= n_1

زمن المرحلة الأولى= n_2

زمن المرحلة الأولى= n_3

الزمن= المسافة /السرعة= $n = L/S$

$n_1=10/30=1/3$ ساعة

$n_2=10/40= 1/4$ ساعة

$n_3= 10/50= 1/5$ ساعة

معدل تغير المسافة (السرعة)= $= L/n$

$L/n=(10+10+10)/(1/3+1/4+1/5)=38.3$ km/hr

ب-الطريقة الثانية

الوسط التوافقي

$H= n /(\Sigma 1/y_i)=3/(10/30+10/40+10/50) = 38.3$ km/h

ب-البيانات المبوبة

إذا كان لدينا المشاهدات $y_1, y_2 ,y_3 ,\ldots..y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها المشاهدات $f_1,f_2,f_3,\ldots..f_n$ على التوالي فالوسط التوافقي لها هو($\bar{H}$) :-

$$\bar{H} = \frac{\sum f_i}{\left(\sum {f_i}/{y_i}\right)}$$

٤- الوسيط Media

أ-البيانات الغير مبوبة

إذا كان لدينا n من القيم او المشاهدات $y_1, y_2 ,y_3 ,\ldots..y_n$ ورتبت ترتيب تصاعدي او تنازلي فان الوسيط يكون:-

١. اذا كان عدد المفردات (n) عدد فردي فان الوسيط هو القيمة التي رتبتها((n+1)/2)) أي ان الوسيط (Me) هو القيمة $Y_{((n+1)/2)}$.
٢. اذا كان عدد المفردات (n) عدد زوجي فان الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين التين ترتيبهما (n/2) و ((n/2)+1)) أي ان الوسيط (Me) هو:-

$$Me =[Y_{(n/2)+1)} + Y_{(n/2)}] /2$$

مثال: - للبيانات التالية تمثل المحتوى الرطوبي لعينات من التربة بالنسبة المئوية؟

Y_i= 14, 15, 3, 4, 11, 7, 13, 12, 8, 5

الحل: - ترتيب البيانات تصاعديا:-

Y_i = 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15

عدد البيانات (n=10) أي زوجي

$Me = [Y_{(n/2)+1} + Y_{(n/2)}]/2 = [Y_{((10/2)+1)} + Y_{(10/2)}]/2$
$= [Y_{(6)} + Y_{(5)}]/2 = [8+11]/2 = 9.5$
ملاحظة: - يعتبر الوسيط مهم في علم الإحصاء خاصة في فرع العلوم الذي يهتم بترتيب القياسات حيث تكون القيمة التي مجموع الانحرافات المطلقة في نهايتها الصغرى.

ب-البيانات المبوبة:-
إذا كان لدينا المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها المشاهدات $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ على التوالي فقيمة الوسيط لهذه البيانات بعد الاستعانة بجدول التوزيع التكراري التصاعدي هو:-

$$M_e = L_1 + \left\{\left[\left(\frac{\sum f_i}{2}\right) - F_i\right] / f_i\right\} \times W$$

$L1$ = الحد الادنى الحقيقي لفئة الوسيط
Σf_i = مجموع التكرارات
F_i = التكرار المتجمع عند بداية فئة الوسيط.
f_i = تكرار فئة الوسيط=التكرار المتجمع عند نهاية فئة الوسيط-التكرار المتجمع عند بداية فئة الوسيط
W = طول الفئة.

خطوات إيجاد الوسيط
١. عمل جدول توزيع تكراري تجميعي تصاعدي او تنازلي.
٢. إيجاد ترتيب الوسيط $\Sigma f_i/2$.
٣. تحديد فئة الوسيط وهي الفئة التي تقع قيمة الوسيط بين حديها وذالك عن طريق ايجاد قيمتين متتاليتين في التكرار التجمعي التصاعدي يقع بينهما ترتيب الوسيط.
٤. تطبيق القانون اعلاه.

٥- المنوال Mode
أ-البيانات الغير مبوبة
هي القيمة او المشاهدة التي تكون أكثر تكرارا من غيرها ويرمز لها برمز M_o
مثال: اذا كانت لدينا القراءات التالية فما هو المنوال؟

$Y_i = 3,2,5,2,4,3,1,2,6,11,2$

الحل:
القيمة التي اكثر تكرارا من غيرها $M_o = 2$
ملاحظة:-
١. يستخدم المنوال في الظواهر التي تكون اكثر شيوعا وتكرارا او أكثر استقرار على سبيل المثال في المعامل والمصانع حيث يكون تكرار الإنتاج اليومي يمثل المنوال ويمثل معدل الإنتاج.
٢. اغلب الرسومات البيانية اما ان تكون ذات منوال واحد احادية المنوال او ذات قيمتين فتدعى ثنائية المنوال او متعددة فتدعى متعددة المنوال.

ب-البيانات المبوبة: -
إذا كان لدينا المشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها المشاهدات $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots f_n$ على التوالي فان المنوال M_o هو:-

$$M_o = L_1 + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \times W$$

$L1$ = الحد الأدنى الحقيقي لفئة المنوال.
d_1 = الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة السابقة.
d_2 = الفرق بين تكرار فئة المنوال والفئة الاحقة.
W = طول الفئة.

بعض خواص مقاييس النزعة المركزية

١- الوسط الحسابي أفضل المقاييس ويتأثر بكافة القياسات المحسوبة والقيم المتطرفة.
٢- مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي لمجموعة ما يساوي صفر.

$$\sum (y_i - \bar{Y}) = 0$$

٣- المنوال من المقاييس المهمة لأنه يدل على القياسات الأكثر شيوعا من غيرها.
٤- الوسط الهندسي شائع كثيرا في الامور الخاصة بالإنتاجية وشائع الاستعمال في اعمال التنمية.

مثال:-
تم فحص ٢٥ نموذج من التربة على عمق معين لايجاد حد السيولة فكانت النتائج كما مبين في ادناه . اوجد :-

١. الوسط الحسابي
٢. الوسط الهندسي
٣. الوسط التوافقي
٤. الوسيط
٥. المنوال.

Y_i = 38,50,52,56,41,56,54,50,45,50,50,60,45,51,55,61,46,63,59,47,53, 57,49,54,58.

الفصل الرابع

مقاييس التشتت والاختلاف

Measurements of Dispersion and Variation

نقصد بالتشتت والاختلاف بأنه مدى التباعد والتقارب أو الانتشار الموجود بين القيم أو المشاهدات عن وسطها والتشتت يعطي فكرة عن مدى التجانس الحاصل بين القيم أو المشاهدات على سبيل المثال: -
للمجموعتين التاليتين: -

Xi = 80, 85, 90, 98, 104, 115, 122, 130   ($\bar{X}$ =١٠٣ وسطها)

Yi = ١٠1, 9٠, 113, 102, 103, 104, 106, 1٠٥   ($\bar{Y}$ = 103 وسطها)

الوسطين للمجموعتين أعلاه متساويين بالقيمة (١٠٣) في حين نرى إن تجانس المجموعة الثانية وتمركزها حول وسطها أفضل من الأولى.

هناك نوعين من مقاييس التشتت: -

أولا: مقاييس التشتت المطلق: وهي المقاييس التي لها وحدات نفس وحدات القيم الأصلية (المشاهدات) أهمها:

1. **المدى The Range**
2. **الانحراف المتوسط The Mean Deviation**
3. **التباين والانحراف القياسي The Variance and Standard Deviation**

ثانيا: مقاييس التشتت النسبي: والتي تكون خالية من وحدات القياس مثل معامل الاختلاف Coefficient of Variation.

أولا: مقاييس التشتت المطلق

١. المدى The Range

هو الفرق بين اعلى قيمة واقل قيمة في تللك المجموعة ويرمز له (R).

$$R = Y_{max} - Y_{min}$$

مثال:- للبيانات أعلاه Xi , Yi ما هو المدى ؟

Solution:-

$R = X_{max} - X_{min}$ = ١٠٣-80= ٢٣

$R = Y_{max} - Y_{min}$ = 1١٣-٩0=23

ملاحظة:- لا يعطي المدى Range صورة واضحة عن التغير في عموم البيانات لأنه يعتمد على القيمتين الطرفيتين فقط ، ولا يعتمد على جميع البيانات فاذا كانت القيمتين المتطرفتين شاذتين اعطى المدى قياس خاطئ حول التغير في البيانات كما في المثال اعلاه. هذا ومن الصعب حساب المدى الحقيقي في جدول التوزيع التكراري لعدم معرفة القيمتين المتطرفتين.

٢. **الانحراف المتوسط The Mean Deviation**

أ- البيانات الغير مبوبة: -

أذا كان لدينا (n) من القيم والمشاهدات $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ فان الانحراف المتوسط المطلق ويرمز له (M.D) (إهمال الإشارة) عن وسطها الحسابي هو.

$$M.D = \frac{\sum|y_i - \bar{Y}|}{n}$$

مثال: -

ما هو الانحراف المتوسط للقيم التالية yi=9,8,6,5,7 ؟

الحل:-

Yi	yi-$\bar{Y}$	|yi-$\bar{Y}$|
9	2	2
8	1	1
6	-1	1
5	-2	2
7	0	0
∑yi= 35		
$\bar{Y}$ = 7		

$$M.D = \frac{\sum|y_i - \bar{Y}|}{n}$$

M.D = 6/5 = 1.2

ب.البيانات المبوبة: -

أذا كان لدينا القيم والمشاهدات $y_1,y_2,y_3,\ldots..y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $f_1,f_2,f_3,\ldots..f_n$ على التوالي فان الانحراف المتوسط المطلق ويرمز له (M.D) عن وسطها الحسابي هو:-

$M.D = [\sum fi\ |yi-\bar{Y}|]/\sum fi$

class	fi	yi	fi*yi	$\lvert yi-\bar{Y} \rvert$	fi* $\lvert yi-\bar{Y} \rvert$
60-62	5	61	305	6.45	32.25
63-65	18	64	1152	3.45	62.1
66-68	42	67	2814	0.45	18.9
69-71	27	70	1890	2.55	68.85
72-74	8	73	584	5.55	44.4
	∑ fi=100		∑ fi*yi =6745		∑=226.5

$\bar{Y} = \sum fi * yi/\sum fi = 6745/100 = 67.45$

$M.D = [\sum fi\ |yi-\bar{Y}|]/\sum fi$

$M.D = 226.5/100 = 2.265$

٣. التباين والانحراف القياسي The Variance and Standard Deviation

كوسيلة للتخلص من الاشارة السالبة نربع الانحرافات عن وسطها وتجمع ثم يؤخذ وسطها للتعبير عن التباين والانحراف القياسي.

أ- البيانات الغير مبوبة:

أذا كان لدينا (n) من القيم والمشاهدات $y_1,y_2,y_3,\ldots..y_n$ فان التباين (S^2) للعينة Sample هو:

$$S^2 = \frac{\sum(y_i-\bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum(y_i)^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}}{n-1} \qquad (1)$$

أما في حالة المجتمع Population فان التباين (σ^2) هو:

$$\sigma^2 = \frac{[\sum(y_i-\mu)^2]}{N} \qquad (2)$$

حيث ان:

$\bar{Y}$ = الوسط الحسابي للعينة.

μ = الوسط الحسابي للمجتمع.
N= حجم المجتمع.
n = حجم العينة.
أما الانحراف المعياري فان جذر التباين الموجب هو الانحراف المعياري.

$$s = \sqrt[2]{S^2}$$

أما في حالة المجتمع فان الانحراف المعياري (σ) هو:

$$\sigma = \sqrt[2]{\sigma^2}$$

ب-البيانات المبوبة:
أذا كان لدينا القيم والمشاهدات $y_1,y_2,y_3,.....y_n$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري مع تكراراتها $f_1,f_2,f_3,.....f_n$ على التوالي فان الانحراف القياسي هو:

$$S = \left[\frac{\sum f_i(y_i-\bar{Y})^2}{\sum f_i-1}\right]^{1/2} = \left[\frac{\left[\sum f_i(y_i)^2-\frac{(\sum f_i y_i)^2}{\sum f_i}\right]}{\sum f_i-1}\right]^{1/2}$$

ملاحظات:
١. اذا كان كل من x, y متغيرين مستقلين وكان z متغير يساوي مجموعهم أي أن :- فان

$Z= X+Y$

$S^2_z = S^2_x + S^2_y$

٢. أذا كانت مجموعتان من القيم مؤلفة من n_1 , n_2 من المشاهدات ولهما تباين S^2_1 ، S^2_2 على التوالي فان التباين المتجمع لجميع المشاهدات (pooled variance) هو:

$$S^2_p = [(n_1-1)\, S^2_1 + (n_2-1)\, S^2_2]/[(n_1-1) + (n_2-1)]$$

وهذا ما يسمى بالتباين الموزون أو المرجح ويمكن كتابته بالصيغة التالية:

$$S_p^2 = \frac{SS_1 + SS_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال: أحسب التباين والانحراف المعياري للبيانات 3,3.5,4,4.5,5 ؟

ثانيا: مقاييس التشتت النسبي

الحل:

xi	xi-X⁻	(xi-X⁻)²
3	-1.0	1.0
3.5	-0.5	0.25
4	0.0	0.0
4.5	0.5	0.25
5	1.0	1
20	0	2.5

$\bar{X} = \sum xi/n = 20/5 = 4$

$S^2 = [\sum(xi-\bar{X})^2]/n-1$

$S^2 = 2.5/4 = 0.625$

$S = (S^2)^{1/2} = (0.625)^{1/2}$

Relative Measurements of Dispersion

مقاييس التشتت النسبي لها اهمية عند مقارنة تشتت مجموعتان او أكثر تختلف في وحداتها القياسية لأنها تكون خالية من وحدات القياس ومن هذه المقاييس معامل الاختلاف (C.V)Coefficient of Variation وهو النسبة المئوية للانحراف القياسي (S or σ) والوسط الحسابي (Y or µ) لمجموعة من القيم على التوالي.

C.V = (S / $\bar{y}$) *100 للعينة

C.V = (σ / µ) *100 للمجتمع

مثال: في اعمال الخرسانة المسلحة لأحدى المنشاة تم استخدام نوعين من الاسمنت A , B وبعد اجراء فحوصات المقاومة للانضغاط كانت النتائج التالية أي هما افضل؟

نوع الإسمنت	الانحراف المعياري Mpa	معدل مقاومة الانضغاط Mpa
A	1.25	25
B	1.3	23

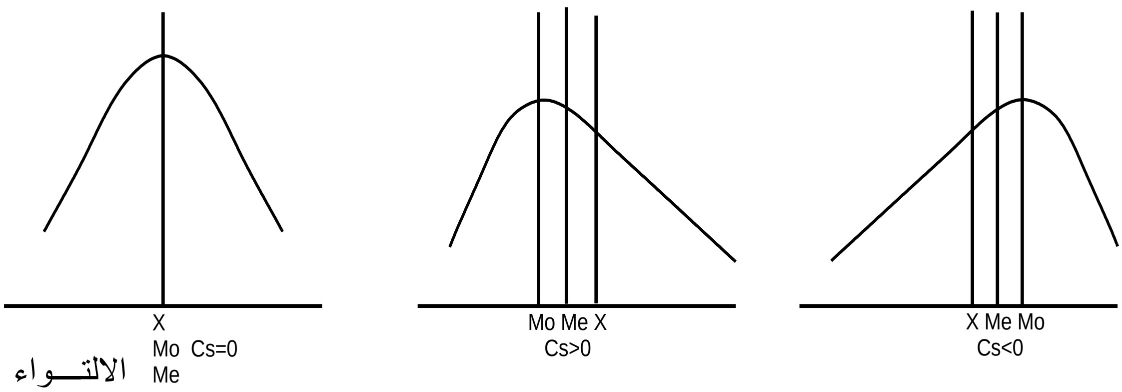
الحل:- للمقاومة نستخدم معامل الاختلاف C.V = (S / $\bar{y}$) *100

نوع الإسمنت	C.V %
A	٥
B	٥,٦

اذا التشتت في B اكثر من A.

مقاييس الالتواء Measurement of Skewness

وهو مقياس يعبر عن درجة تناظر التوزيع ويبين فيما إذا كان التوزيع متناظر او يحتوي على التواء ولتحديد طبيعة الالتواء هناك عدة مقاييس:



الالتـــواء نحو اليسار   الالتواء نحو اليمين   الالتواء معتدل

١. معامل الالتواء الاول Cs1 والذي يعتمد على قيمة الوسط الحسابي للمشاهدات حيث ان :

$C_{s1} = a/S^3$ للعينة

$C_{s1} = a/\sigma^3$ للمجتمع

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{Y})^3$$ للعينة

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum(y_i - \mu)^3$$ للمجتمع

حيث ان:-

Xi = المشاهدات

$\bar{X}$ = الوسط الحسابي للعينة

μ = الوسط الحسابي للمجتمع

N = حجم المجتمع و n = حجم العينة

$(xi-\bar{X})^3$ = العزم الثالث حول الوسط الحسابي.

٢. معامل الالتواء الثاني C_{s2} والذي يعتمد على الوسط الحسابي والوسيط.

$$C_{s2} = \frac{3(\bar{Y} - Me)}{S}$$

حيث ان:

S = الانحراف المعياري للعينة.

ملاحظة:

١. اذا كانت قيمة معامل الالتواء(C_s) صفرا فان التوزيع متناظر اما اذا كانت قيمة معامل الالتواء موجب فالتوزيع ملتوي نحو اليمين واذا كان قيمة معامل الالتواء سالبة فالتوزيع ملتوي نحو اليسار.

٢. ان جميع المعاملات لا بعدية لذلك يمكن المقارنة بين التواء البيانات الاحصائية.

٣. هناك مقاييس اخرى للالتواء مثل الالتواء الربيعي والمئيني.

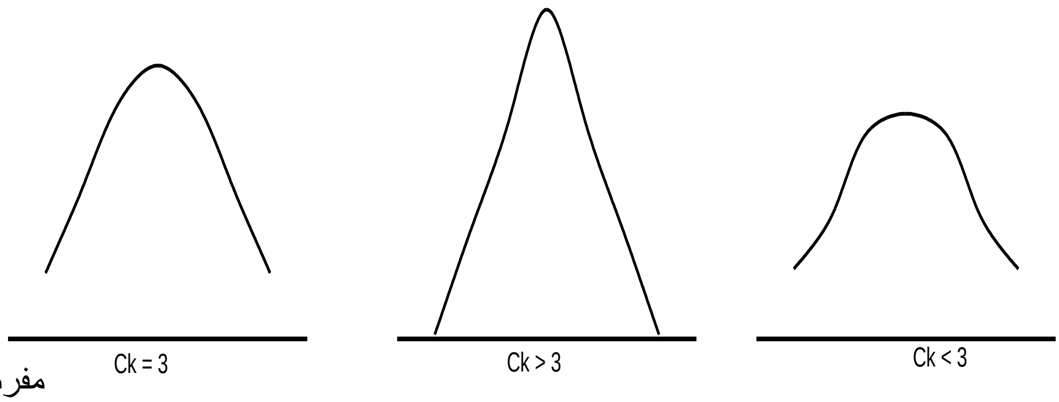
مقاييس التفرطح Measures of Kurtosis

يعرف التفرطح بدرجة استدقاق البيانات او تدبب التوزيع. ويعبر عنه بمعامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis) ويرمز له (C_k).

$$C_k = \frac{\left[\frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{Y})^4\right]}{S^4}$$

حيث ان:

العزم الرابع حول الوسط الحسابي $\sum(y_i - \bar{Y})^4$



مفرطح

معتدل مدبب

مثال: تم فحص الكثافة النوعية لعشرين نموذج من الرمل في مختبر التربة وكانت النتائج كما في الجدول أدناه. اوجد ما يلي:

١. الوسط الحسابي ٢. التباين والانحراف القياسي ٣. معامل التغيير والالتواء ولتفرطح.

التكرارات	الفئات
١	٢,٣٩-٢,٣
٢	٢,٤٩-٢,٤
٣	٢,٥٩-٢,٥
٦	٢,٦٩-٢,٦
٧	٢,٧٩-٢,٧
١	٢,٨٩-٢,٨
٢٠	المجموع

الحل:-

$X^{-} = \sum Xi*fi / \sum fi = 52/20 = 2.64$

$S^2 = [\sum(xi-X^{-})^2 fi]/ (\sum fi-1) = 0.31/19 = 0.016$

$S = ([\sum(xi-X^{-})^2 fi]/ (\sum fi-1))^{1/2} = (0.016)^{1/2} = 0.1276$

$C.V = S / X^{-} * 100 = 0.1267*100/2.64 = 4.83$

$a = (1/n)\sum(xi-X^{-})^3 = -0.0264/20 = -0.0013$

$C_{s1}= a/S^3 = -0.0013/(0.1276)^3 = -0.6354$ ملتوي نحو اليسار

$Ck = [(1/n)\sum(xi-X^{-})^4]/S^4 = 0.01332*(0.1276)^4/20 = 2.51 > 3$

التوزيع مفرطح

$(xi-X^{-})^4fi$	$(xi-X^{-})^3fi$	$(xi-X^{-})^2fi$	$(xi-X^{-})fi$	Xi*fi	Xi	fi	الفئات
٠,٠٠٧٦	- ٠,٠٢٥٧	٠,٠٨٧	- ٠,٢٩٥	٢,٣٤٥	٢,٣٤٥	١	٢,٣٩-٢,٣
٠,٠٠٢٩	- ٠,٠١٤٨	٠,٠٧٦	- ٠,١٩٥	٤,٨٩٠	٢,٤٤٥	٢	٢,٤٩-٢,٤
٠,٠٠٠٢	- ٠,٠٠٢٦	٠,٠٢٧	- ٠,٠٩٥	٧,٦٣٥	٢,٥٤٥	٣	٢,٥٩-٢,٥
٠,٠٠٠	٠,٠٠٠	٠,٠٠٠٢	٠,٠٠٥	١٥,٨٧	٢,٦٤٥	٦	٢,٦٩-٢,٦
٠,٠٠٠٩	- ٠,٠٠٨١	٠,٠٧٧	٠,١٠٥	١٩,٢٢	٢,٧٤٥	٧	٢,٧٩-٢,٧
٠,٠٠١٨	٠,٠٠٨٦	٠,٠٤٢	٠,٢٠٥	٢,٨٤٥	٢,٨٤٥	١	٢,٨٩-٢,٨
٠,٠١٣٣	- ٠,٠٢٦٤	٠,٣١	٠	٥٢,٨		٢٠	المجموع

اسالة عامة

سؤال: الجدول التكراري في ادناه يمثل اوزان ٥٠ طالبا و طالبة مقاسة الى اقرب باوند تم اختيارهم بشكل عشوائي بين ١٠٥٤٠ طالب و طالبة. احسب:

١. الوسط الحسابي و الوسيط والمنوال.
٢. ماهي نسبة الطلا الذين تزيد اوزانهم عن ١٦٠ باوند.
٣. ماهي نسبة الطلاب الذين تكون اوزانهم بين ١٥١ و١٧٥ باوند.
٤. احسب التباين والانحراف المعياري.

٥. ارسم المدرج والمضلع التكراري والمحنيين التصاعدي والتنازلي النسبي.

Table 8.4

Range	Frequency
136–140	2
141–145	2
146–150	3
151–155	5
156–160	13
161–165	11
166–170	7
171–175	4
176–180	2
181–185	1
	50

سؤال: البيانات التالية تمثل العمر المتوقع للمواليد في الولايات المتحدة للولادات بين ١٩٧٠ – ١٩٩٦ز

١. كون جدول توزيع تكراري.
٢. الوسط الحسابي و الوسيط والمنوال.
٣. ماهي نسبة الاعمار التي تزيد عن الوسط الحسابي بمقدار فئتيين.
٤. احسب التباين والانحراف المعياري.
٥. ارسم المدرج والمضلع التكراري والمحنيين التصاعدي والتنازلي النسبي.

Year	No. of Degrees	Year	No. of Degrees	Year	No. of Degrees
1966	13 705	1976	16 045	1986	21 096
1967	13 921	1977	16 012	1987	22 070
1968	15 232	1978	16 080	1988	22 726
1969	15 248	1979	15 279	1989	23 743
1970	15 597	1980	15 943	1990	23 995
1971	16 367	1981	16 451	1991	24 013
1972	16 764	1982	17 557	1992	25 018
1973	16 545	1983	18 886	1993	27 664
1974	15 205	1984	20 145	1994	28 717
1975	15 167	1985	20 972	1995	28 630
				1996	27 761

سؤال: في أحد تجارب قياس التصريف (لتر/دقيقة) وتم تسجيل الفترات الزمنية (دقيقة) التي استغرقها التصريف خلال ٢٥ دقيقة وكانت النتائج كما في الجدول ادناه اوجد مايلي:

١. معدل التصريف في الدقيقة.
٢. الانحراف المعياري ومعامل الالتواء الثاني.
٣. ارسم المنحني التكراري.

زمن التصريف (دقيقة)	التصريف (لتر/دقيقة)

١٨-٢٠	١
٢١-٢٣	٤
٢٤-٢٦	١٣
٢٧-٢٩	٥
٣٢-٣٠	٢

البيانات التالية تمثل كمية ثاني أوكسيد الكاربون المنبعث من احد افران الحرق والمقاس كل ٩ ثواني:

١. كون جدول توزيع تكراري.
٢. الوسط الحسابي و الوسيط والمنوال.
٣. الانحراف المعياري ومعامل الالتواء الثاني.
٤. ارسم المنحني التكراري.

53.8	56	48.4	48.3	51.5	54.4	57.7
53.6	56.8	47.9	47	51.6	56	57
53.5	56.8	47.6	45.8	51.2	56.9	56
53.5	56.4	47.5	45.6	50.5	57.5	54.7
53.4	55.7	47.5	46	50.1	57.3	53.2
53.1	55	47.6	46.9	49.8	56.6	52.1
52.7	54.3	48.1	47.8	49.6	56	51.6
52.4	53.2	49	48.2	49.4	55.4	51
52.2	52.3	50	48.3	49.3	55.4	50.5
52	51.6	51.1	47.9	49.2	56.4	50.4
52	51.2	51.8	47.2	49.3	57.2	
52.4	50.8	51.9	47.2	49.7	58	
53	50.5	51.7	48.1	50.3	58.4	
54	50	51.2	49.4	51.3	58.4	
54.9	49.2	50	50.6	52.8	58.1	

الفصل الخامس
مبادئ نظرية الاحتمالية
Elementary probability theory

يهتم هذا الفصل بدراسة وقوع حادث (event) معين ويسمى نجاح من عدم وقوعه الفشل وله أهمية كبيرة في علم الإحصاء. هذا وان جميع أمثلة الاحتمال تكون مبنية على أربعة تجارب هي:

١. تجارب زار النرد (dice) الذي يتكون من ستة وجوه .
٢. تجارب قطعة النقود (coin) التي تتكون من وجهين .
٣. تجارب صندوق الكرات (ball box or black box).
٤. تجارب ورقة اللعب (cards) الذي يتكون من (٥٢) ورقم مقسم إلى أربعة مجاميع .

مصطلحات وتعاريف Terms and Definitions

١ . التجربة العشوائية Random experiment

وهي التجربة التي لا يمكن التنبؤ بنتائجها وتخضع الى قوانين الاحتمالية. فعلى سبيل المثال، في قطعة النقود أما تكون صورة أو كتابة (H, T) .

٢ . فضاء العينة Sample Space

وهو مجموعة من النقاط تمثل جميع النتائج الممكنة لتجربة ما ، حيث أن كل نتيجة تمثل نقطة أو عنصر في فضاء العينة . على سبيل المثال رمي نصي نقود فان فضاء العينة هو أربعة نقاط

(HH, HT, TH, TT) اما زار النرد فان فضاء العينة هو (1,2,3,4,5,6).

٣ . الحدث (الحادث) Event

نقطة أو عدة نقاط في فضاء العينة ويرمز له بـــــ Ei وهناك عدة أنواع من الأحداث هي :

١،٣ . الأحداث المتنافية Mutually (exclusive) events

هي الأحداث التي لا يمكن أن تقع سوياً أو معا مثال على ذلك رمي قطعة النقود مرة واحدة يعطي إما T أو H ولا يعطي الاثنين معاً .

٢،٣ . 1لحوادث المستقلة Independent events

هي الحوادث التي لا تؤثر وقوع أحدها على نتيجة الحادث الآخر، مثال ذلك رمي قطعتي نقود لا تؤثر نتيجة القطعة مع نتيجة القطعة الثانية كذلك السحب من صندوق الكرات مع الارجاع.

٣,٣. الحوادث غير المستقلة *Non-independent events*
هي الحوادث التي تؤثر وقوع أحدهما على نتيجة الحدث الآخر. مثال ذلك سحب كرتين متتاليتين بدون إرجاع احتمالية الكرة الأولى تؤثر على الثانية.

٤. *الحالات الممكنة* *Possible cases*
هي جميع الحالات التي يمكن أن تظهر في تجربة معينة وبصورة اخرى تمثل فضاء العينة. مثال ذلك رمي زهر النرد فان الحالات الممكنة هي ستة نقاط (1, 2, 3, 4, 5, 6).

٥. *الحالات المفضلة* *Favorable cases*
هي جميع الحالات التي تحقق ظهور الحادث المراد دراسته ويسمى أيضا حالات النجاح. مثال ذلك رمي زهر النرد وكان الحدث ظهور عدد زوجي فان الحالات هي (2, 4, 6).

٦. *الحالات المتماثلة* *Equal likely cases*
وهي الحالات المتكافئة والمتساوية في إمكانية حدوثها. مثال ذلك رمي قطعة النقود فان احتمال معدل الوجه (صورة) يساوي احتمال حصول الكتابة .

نظرية الاحتمالية Probability theory

إذا كان في حاصل تجربة العدد n من النتائج أو الحالات الممكنة (all possible cases) وان m من الحالات المصاحبة لوقوع حدث معين Ei أو ما يسمى الحالات المواتية (Favorable cases) لوقوع الحدث (عدد حالات النجاح للتجربة) فان احتمال وقوع الحدث P(Ei) يساوي :

الحالات المواتية \الحالات الممكنة = عدد حالات النجاح \ العدد الكلي للحالات

$$P(E_i) = \frac{m}{n}$$

كما وان $\bar{P}(E_i)$ تشير الى عدم وقوع الحالات والذي تساوي ؛
عدد حالات العكس \ العدد الكلي للحالات =
(عدد الحالات الكلية-عدد حالات النجاح) \ العدد الكلي لمحاولات

$$\bar{P}(E_i) = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

ملاحظة: أن قيمة الاحتمالية لأي حدث يتراوح بين (1-0).

<u>**مثال**</u> / رميت قطعة النقود مرتين، فما هو احتمال الحصول على الصورة؟
الحل / فضاء العينة =

HH, HT, TH, TT

١- عدد الحالات الممكنة = 4 = n
عدد الحالات المواتية (صورة واحدة) = ٢ P (H) = m / n = 2 / 4 = 1 / 2
٢- عدد الحالات الممكنة = 4=n
عدد الحالات المواتية (صورتين) = ١ P (2H) = m / n = 1 / 4

<u>مثال/</u> في تجربة صندوق الكرات يحتوي على ٣ كرات حمراء و ٤ كرات سوداء و ٥ كرات بيضاء متساوية الحجم والوزن ، فإذا تم سحب كرة فما هو احتمال ؟
١- حمراء ٢- سوداء ٣- بيضاء
الحل / عدد الحالات الممكنة = n = ١٢
١- عدد حالات المواتية (كرة حمراء) = m =٣

P (R) = m / n = 3 / 12 = 1 / 4

٢- عدد الحالات المواتية للكرة السوداء = m= ٤

P(B) = m / n = 4 / 12 = 1 / 3

٣- عدد الحالات المواتية للكرة البيضاء = m= ٥

P (w)= m/n = 5/12

مثال / لاستغلال المياه الجوفية في إحدى الحقول تم حفر ١٥٠ بئر فكان ٧٥ بئر عميق و ٩٠ بئر عذبة و ٥٠ بئر ارتوازي . عند القيام بحفر بئر جديد، فما هو احتمال الحصول على:

١- بئر عميق . ٢- بئر ارتوازي .

الحل / عدد الحالات الممكنة = ١٥٠ = n

عدد الحالات المواتية (بئر عميق) D = m= ٧٥

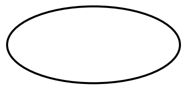
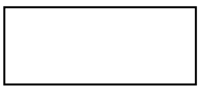
P(D) = m/n = 75 / 150 = 1 / 2

عدد الحالات المواتية (بئر ارتوازي) I= m= ٥٠

P (I) = m/n = 50 / 150 = 1/3

مخطط فن Venn Diagram

يستخدم هذا المخطط لتوضيح توزيع عدد العناصر (elements) التي ترتبط مع كل حادث (Ei) نسبة إلى المجتمع (U) هذا ويمثل المجتمع بشكل مستطيل بينما الحوادث تمثل بشكل بيضوي.

الحادثة Ei  المجتمع U 

قوانين الاحتمالية Laws of Probability

هناك عدة قوانين في الاحتمالية يمكن الاستفادة منها في حساب وقوع الحدث كما يمكن الاستفادة من مخطط فن في تمثيل هذه القوانين والحوادث.

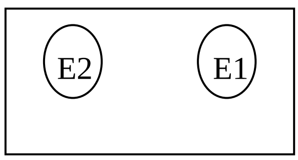
١- قانون الجمع *Addition Law*

١,١. الأحداث المتنافية Mutually Exclusive Events

إذا كان E1, E2 حدثان متنافيان فان احتمال حدوث أيا منها أي بمعنى وقوع الحدث E1 , E2 هو حاصل جمع احتمال كل منها ويمكن تمثيلها كما في الشكل أدناه :

$$P(E1+E2)=P(E1)+P(E2)$$

Or $$P(E1UE2)=P(E1)+P(E2)$$



وبصورة عامة إذا كان أكثر من حدثين فان احتمال وقوع أيا منهما هو حاصل المجموع

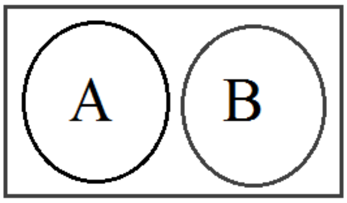
$$P(E1+E2+\text{------}+En)= P(E1)+P(E2)+P(E3)+\text{-------}+P(En)$$

ملاحظة: لا توجد عناصر مشتركة في الأحداث المتنافية.

مثال / في مخزن للسمنت يوجد نوعين من الأسمنت المقاوم A = 100 ton , B = 125 tonتم سحب طن واحد ما هو احتمال أن يكون من A or B ؟

الحل/ الأحداث متناوبة تستخدم قانون الحجم

P(A+B)= P(A) +P(B)= 100/125+ 125/425=225/425

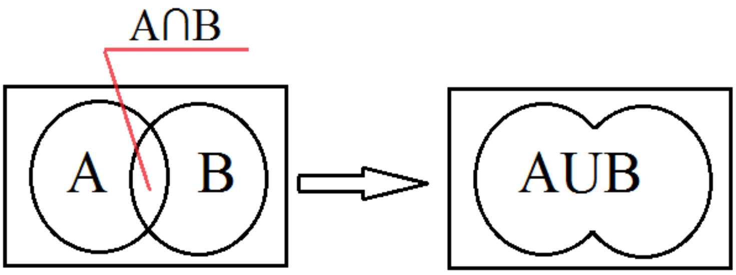


٢,١ . الأحداث غير متنافية *Non-mutually Exclusive Events*

إذا كانت الحوادث E1, E2 غير متنافية فان هناك عناصر مشتركة بين الحدثين عليه فان احتمال حدوث أي منها (E1,E2) هو حاصل جمع احتمال كل منها مطروحا احتمال حدوثهما معا .

$$P(E1+E2) = P(E1)+P(E2) - P(E1E2)$$

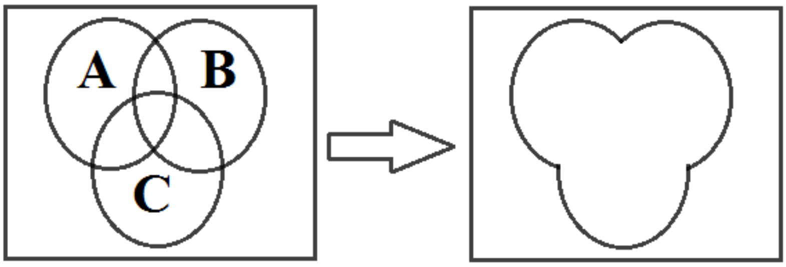
$$P(E1UE2) = P(E1)+P(E2)-P(E1UE2)$$



وبصورة عامة إذا كانت اكثر من حدثين E1, E2, ----En

$$P(E1+E2+----+En)=P(E1)+P(E2)+-----+P(En)-P(E1E2)-P(E1E3)+-----$$

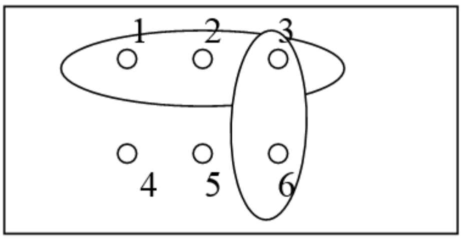
$$+ P(E1E2E3) +--------$$



مثال: القي زار النرد مرة واحدة فما هو احتمال ظهور عدد يكون فرديا أو يقبل القسمة على ٣ ؟

الحل:

P(E1) = Odd number = 3/6 =1/2
P(E2)= integer number (accepts dividing on 3) = 2/6
P(E1E2) =1/2 * 1/3 = 1/6
P(E1+E2)=P(E1)+P(E2)-P(E1E2)
=1/2+1/3-1/6=2/3



٢. قانون الضرب Multiplication law

٢,١. الأحداث مستقلة *Independent Events*

اذا كان الحدثين E1, E2 مستقلين فان احتمال حدوثهما هو حاصل ضرب احتمال كل منهما

$$P(E1E2)=P(E1).P(E2)$$

ولأكثر من حدثين

$$P(E1E2---En)=P(E1).P(E2)\ \ldots..P(En)$$

مثال: اذا كان احتمال نجاح مهندس A في تصميم معين هو (١٨\٣٠) واحتمال نجاح تصميم مهندس B هي (٢١\٣٠) فإذا كان عمل كل منهما مستقل عن الآخر ما هو احتمال :

١- أن يكون التصميمان ناجحين.
٢- أن يكون التصميمان فاشلين.

الحل:

1- P(AB)=P(A).P(B) = 18/30*21/30=42/100
2- P(AB) = P(A).P(B) = (1-18/30) (1-21/30)=12/30*9/30=21/100

٢,٢. الأحداث الغير مستقلة: إذا كان الحدثان E1, E2 غير مستقلين فان احتمال حدوثهما هو حاصل ضرب احتمال الحدث الأول بالحدث الثاني مشروطا بوقع (E1)

$$P(E1E2)= P(E1).P(E2/E1)$$

ولأكثر من حدثين.

$$P(E1E2---En)= P(E1)\ .P(E2/E\ 1).P(E3/E2E1)----P(En/E1E2---En-1)$$

مثال: صندوق يحتوي على ٥ كرات حمراء و ٣ سوداء فإذا سحبت كرتان سويتان (الواحدة بعد الأخرى) ما هو احتمال أن تكون كلتاهما سوداء ؟

الحل:

احتمال الكرة الأولى سوداء P(B)= 3/8
احتمال الثانية سوداء P(B2/B1)=2/7

P(B1B2)= P(B!0.P(B2/B1)=3/8*2/7=6/56

٣. الاحتمال الشرطي Conditional Probability

هو الاحتمال الذي يقع في شروط معينة، فإذا كان B and A حدثان في فضاء العينة فان احتمال وقوع الحادث A علما بان الحادث B قد وقع ويرمز له P(A/B) هو:

$$P(A/B)=P(AB)/P(B)=$$

عدد الحالات لوقوع الحادث AB \ عدد الحالات لوقوع الحادث B

مثال: صندوق يحتوي على ٦ كرات حمراء و٤ سوداء فإذا سحبت كرتان على التوالي بدون إرجاع ما هو احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء علما أن الأولى حمراء؟

الحل:

P(R1)=6/10

P(R2)=5/9

P(R1/R2)= P(R1R2)/P(R1)= (6/10*5/9)/6/10=(1/3)/(6/10)=5/9

مثال: في مجمع سكني ١٠٠٠ شقة و٥٠٠ نهاني القاطع الشمالي و ٥٠٠ الاخرى في القاطع الجنوبي في كل قاطع ٢٠٠ من الشقق تحتوي على شبابيك كبيرة و ١٠٠ مدفئة مركزية و ٣٠% من الشقق ذات الشبابيك الكبيرة مدفئة مركزيا ، عند اختيار شقة بصورة عشوائية جد احتمال :

١. في القاطع الشمالي
٢. في القاطع الشمالي وذات شبابيك كبيرة
٣. في القاطع الشمالي وذات شبابيك كبيرة ومدفئة مركزيا .
٤. في القاطع الجنوبي وغير مدفئة مركزيا .

الحل:

Suppose to be:

E1= شقة في القاطع الشمالي

E2= شقة ذات شبابيك كبيرة

E3= شقة مدفئة مركزيا

N(E1)=500

N(E2)=400

N(E3)=200

N(E1E2)=200

N(E1E3)=100

N(E2E3)=(400*0.3)=120

N(E1E2E3)=200*0.3=60

N(E1E3)=400

1- P(E1)=500/1000=0.5

2- P(E1E2)=200/1000=0.2

3- P(E1E3)=400/1000=0.4

4- P(E1E2E3)=60/1000=0.6

تعاريف ومصطلحات (تكملة)

٧. **المضروب Factorial**

مضروب العدد (n) ويرمز له (n!) ويعرف بالصيغة التالية:

$$\boldsymbol{n! = n(n-1)(n-2)\dots\dots\dots1}$$

For example: $n = 6 \implies n! = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$

ملاحظة: مضروب الصفر = ١ $(0! = 1)$

٨. التباديل Permutation

هي ترتيب لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب.فعدد التباديل لمجموعة مكونة من n من الأشياء مأخوذًا r منها في كل مرة يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n من الأشياء بحيث تحوي كل ترتيبه على r من هذه الأشياء مع مراعاة الترتيب ويرمز لها ***nPr*** .

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبه على حرفين؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C؟

الحل :

n = 3, r = 2.

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

AB, AC, BA, BC, CA, CB.

ملاحظات:

١. اذا كان (n = r) فان عدد التباديل هو (n!) علا سبيل المثال إذا اختيرت جميع الحروف في المثال أعلاه فان عدد التباديل هو:

n = 3, r = ٣.

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = 6$$

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

٢. اذا كانت هناك اكثر من مجموعة متشابه (m1, m2, ……) فان عدد التباديل هو:

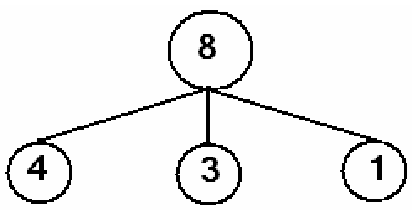
$$\frac{n!}{m_1!\, m_2!\, m_3! \ldots\ldots\ldots m_j!}$$

$n = m_1 + m_2 + \ldots\ldots + m_j$

مثال: بكم طريقة يمكن توزيع طلاب على النحو التالي :4 طلاب لتخصص الإحصاء و 3 طلاب لتخصص الرياضيات و طالب واحد لتخصص الفيزياء.

الحل:

عدد الطرق لتوزيع الطلاب وفق الطريقة المذكورة:



$$\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!} = \frac{8!}{4!3!1!} = ٢٨٠$$

٩. التوافيق Combinations

هو عدد الطرق الاختيار لكل مجموعة (r) يمكن اختيارها من مجموعة (n) بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب ويرمز لها nCr. او $\binom{n}{r}$

$$nCr = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال **:**بكم طريقة يمكن اختيار حرفين بدون مراعاة الترتيب من مجموعة الحروف A, B, C ؟

الحل :

n = 3, r =2.

$$nCr = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2*1} = 3$$

AB, AC, BC

مثال: لدينا ٨ رجال و ٦ نساء يتقدمون للتوظيف لأربعة مناصب:

١. ما هو عدد الطرق المختلفة لتوظيف هذه المجموعة؟
٢. ما هو عدد الطرق المختلفة لتوظيف هذه المجموعة علما ان الاختيار يكون اثنين رجال واثنين نساء؟

الحل:

١. الاختيار عشوائي بدون النضر الى جنس المتقدم.

$$14C4 = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = ١٠٠١$$

٢. الاختيار مقيد على ان يكون اثنان من كل جنس

$$8C2\,.6C2 = \binom{8}{2}\binom{6}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!}\;\frac{6!}{2!(6-2)!} = ٤٢٠$$

الاحتمالية والتحليل التوفيقي Probability and Combination Analysis

يمكن استخدام التحليل التوفيقي في احتساب الاحتمالية لأي حادث اعتمادا على عدد الترتيبات المحتملة الوقوع لذلك الحادث. المثال التالي يوضح كيفية هذا:

مثال: صندوق يحتوي على ٨ كرات حمراء و ٣ بيضاء و ٩ زرقاء، فاذا سحبت ثلاث كرات عشوائيا ما هي احتمالية تحقق ما يلي: **(١)** ٣ حمراء **(2)** ٣ بيضاء **(3)** ٢ حمراء و ١ بيضاء **(4)** على الأقل ١ بيضاء **(5)** واحدة من كل لون.

الحل:

الحل بشكل عام مبني على تعريف الاحتمالية بشكل مبسط، حيث تحتسب عدد حالات النجاح او الحالات المفضلة وعدد الحالات الكلية بالتوافيق وتحسب الاحتمالية.

1. $3R = P(3R) = \frac{No.of\ groups\ for\ only\ 3R\ from\ only\ 8R}{No.of\ groups\ for\ any\ 3\ balls\ from\ all\ balls\ (20)} = \frac{m}{n} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.049$
2. $3W = P(3W) = \frac{No.of\ groups\ for\ only\ 3W\ from\ only\ 3W}{No.of\ groups\ for\ any\ 3\ balls\ from\ all\ balls\ (20)} = \frac{m}{n} = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.0008$
3. $2R\ 1W = P(2R\ 1W) = \frac{(No.of\ groups\ for\ only\ 2R\ from\ only\ 8R)\times(No.of\ groups\ for\ only\ 1W\ from\ only\ 3W)}{No.of\ groups\ for\ any\ 3\ balls\ from\ all\ balls\ (20)} = \frac{m}{n} = \frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = 0.0736$
4. $at\ least\ 1W = P(W \geq 1) = P(1W) + P(2W) + P(3W) = 1 - P(\bar{W})$

$$Either\ P(W \geq 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{17}{2} + \binom{3}{2}\binom{17}{1} + \binom{3}{3}\binom{17}{0}}{\binom{20}{3}} = \frac{404 + 51 + 6}{1140} = 0.403$$

$$\boldsymbol{Or}\quad P(\bar{W}) = \frac{3\ balls\ are\ not\ white\ from\ 17\ balls}{any\ 3\ balls\ from\ 20\ balls} = \frac{m}{n} = \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = 0.596$$

$$P(W \geq 1) = 1 - P(\bar{W}) = 1 - 0.596 = 0.403$$

5. $1R1W1B = P(1R\ 1W\ 1B) = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = 0.189$ حوادث مستقلة

The Tree Diagram for Probability مخطط الشجرة للاحتمالية

هو مخطط تفصيلي يعطي جميع الاحتمالات الممكنة لأي حدث. المثال التالي يوضح ذلك:

مثال: في احدى التقاطعات المرورية تصل ٧ مركبات كل دقيقة وتكون الونها هي ٣ حمراء و٢ سوداء و2 بيضاء. اذ وصلت سيارتان على التعاقب ما هي الاحتمالات الواردة والني يمكن التنبؤ بها ؟.

الحل:

سوف نستخدم الشجرة في احتساب جميع الاحتمالات.

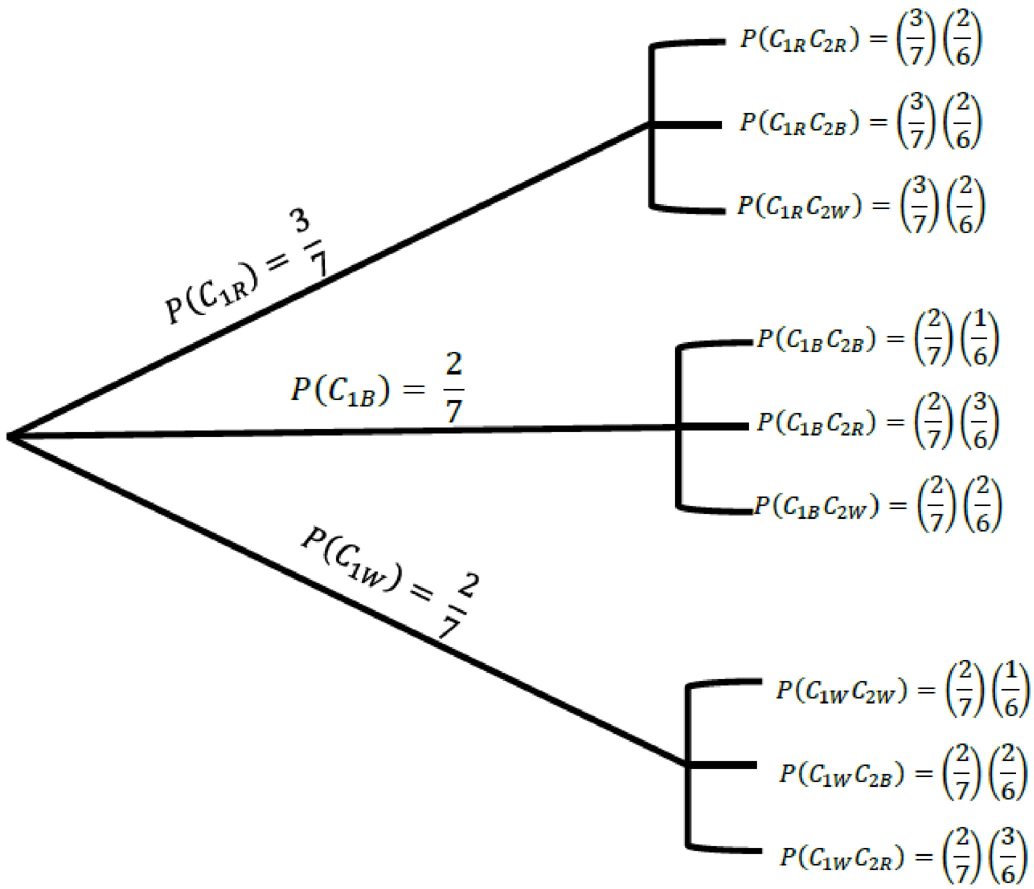
هناك مرحلتين لوصل المركبات ،عليه احتمالية المرحلة الثانية تكون غير مستقلة عن الاول (حوادث غير مستقلة).

Stage 1:

$P(C_{1R}) = \frac{3}{7} = first\ red\ car$

$P(C_{1B}) = \frac{2}{7} = first\ black\ car$

$P(C_{1W}) = \frac{2}{7} = first\ white\ car$



<u>مثال:</u> موقف للسيارات مكون من عشرة فضاءات مرتبة في صف واحد، وعلى الدوام يكون مشغول بسبعة سيارات متوقفة بشكل عشوائي.

١. ماهو فضاء العينة (عدد الترتيبات) للسيارات المتوقفة.
٢. ماهو فضاء العينة (عدد الترتيبات) للمواقف الفارغة.
٣. ماهو احتمالية ان تكون ثلاث فضات متجاورة فارغة على الدوام.

<u>الحل:</u>

١. باستخدام التوافيق يمكن تحديد عدد الترتيبات للمواقف المشغولة:

n= 10 , r=7.

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = 120$$

٢. باستخدام التوافيق يمكن تحديد عدد الترتيبات للمواقف الفارغة:

n= 10 , r=٣.

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

٣. احتمالية أي ثلاث مواقف فارغة هي:-

$$P(any\ 3\ rmpty\ parkings\ ) = \frac{1}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$$

عدد الترتيبات لثلاث مواقف فارغة متجاورة هي ٨.

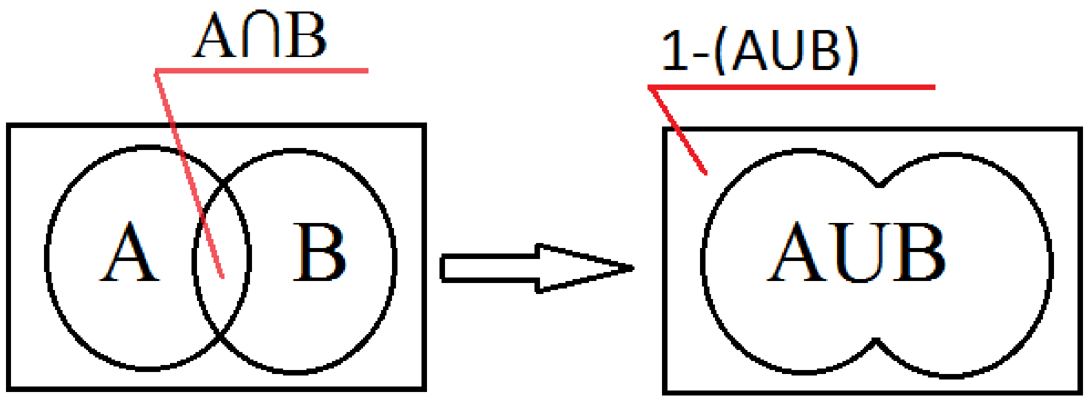
$$P(any\ 3\ adjacent\ empty\ parkings\ ) = \frac{8}{\binom{10}{3}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

مثال: احد متاجر السيارات يتعامل مع سيارات مستعملة و سيارات يابانية. فاذا كان احتمالية عدم شراء أي سيارة من هذا المتجر هو ٥٥%، وان احتمالية شراء سيارة ياباني هو ٣٠% وسارة مستعملة هو ٢٥%. ماهو احتمالية ان احد العملاء يشتري سيارة ياباني مستعمل ؟.

الحل:

Let A the probablity of second hand car = 25%

Let B the probablity of Japanes car probablity = 30%



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\bar{P}(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)$

$\bar{P}(A \cup B) = 0.55 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - \bar{P}(A \cup B) = 1 - 0.55 = 0.45$

$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.25 + 0.35 - 0.45 = 0.1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

الفصل السادس

التوزيعات الاحتمالية Probability Distribution

عبارة عن نموذج رياضي Mathematical Model للتوزيع التكراري الحقيقي للمجتمع حيث أن التوزيع التكراري للعينة هو توزيع تقديري للتوزيع التكراري للمجتمع العائد إليه تلك العينة ، تصنف هذه التوزيعات إلى نوعين :

١- توزيعات احتمالية متقطعة.
٢- توزيعات احتمالية مستمرة.

١ - التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Discrete Probability Distributions

وهو جدول أو قانون يعطي جميع قيم المتغير العشوائي المتقطع مع جميع الاحتمالات المقترنة مع كل قيمة من قيم المتغير المتقطع هذا وأن هذه التوزيعات تتعامل مع المتغيرات العشوائية المتقطعة التي تختلف الواحدة عن الاخرى بكميات محددة معينة. وهناك أربعة أنواع من التوزيعات المتقطعة:

١- توزيع ذي الحدين Binomial Distribution
٢- توزيع متعدد الحدود Multinomial Distribution
٣- توزيع هندسي زائد Hyper geometric Distribution
٤- توزيع بواسون Poisson Distribution

١ - توزيع ذي الحدين Binomial Distribution

يعتبر توزيع ذي الحدين من أهم التوزيعات المتقطعة ويستخدم بكثرة في المجالات الهندسية. وهو يتعامل مع التجارب التي نتائجها تكون بنجاح أو فشل والمتغير الخاص بهذا التوزيع يسمى متغير ذي الحدين وهو متقطع القيم (قيم عددية) من صفر إلى ١. هذا وان التكرار يكون راص التجربة بمعنى أنها تكون مستقلة. حيث أن:

من التجارب المتكررة (n) من المرات والمستقلة والتي تصنف نتائجها إلى صنفين نجاح (ظهور الحادث) أو فشل (عدم ظهور الحادث).

فإذا رمزنا إلى وقوع أو النجاح P و الفشل q بحيث أن $p + q = 1$ ورمزنا إلى المتغير العشوائي y بعدد النجاحات ، فإن احتمال ظهور الحادث y عدد من المرات في n من التجارب أو المحاولات هو:

$$p\ (y = y_o) = (nCy)\ p^y\ q^{n-y} \qquad y=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ n$$

ملاحظة: يسمى توزيع ذي الحدين بتوزيع برنولي نسبة إلى العالم جيمس برنولي الذي اكتشفه .

مثال:

إذا كان احتمال سقوط المطر في أي يوم من شهر تشرين الثاني ٢٠%، جد احتمال:

١- سقوط المطر في أي ثلاثة أيام.
٢- سقوط المطر في ٢٧ يوم أو أكثر.
٣- سقوط المطر في يومين أو أكثر.
٤- عدم سقوط المطر إطلاقا خلال الشهر.

الحل:

1- p = 0.2 q = 0.8 n = 30 r = 3

$p\ (y = ٣) = (٣٠C٣)\ p^{٣}\ q^{٣٠-٣}$

$p(y =3) = 30\ C3\ (0.2)^3\ (0.8)^{27} = 0.08$

2- $P(y \geq 27) = P(y = 27) + P(y=28) + P(y=29) + P(y=30)$

$P(y \geq 27) = 30C27\ (0.2)^{27}\ (0.8)^{3} + 30C28\ (0.2)^{28}\ (0.8)^{2} + 30C29\ (0.2)^{29}\ (0.8)^{1} + 30C30\ (0.2)^{30}\ (0.8)^{0} = 0.008$

3- $p(y \geq 2) = 1 - p(y < 2) = 1 - (P(y=1) + P(y=0))$

$= 1 - [30C0\ (0.2)^{0}\ (0.8)^{30} + 30C_1\ (0.2)^{1}\ (0.8)^{29}] = 0.988$

4- $p(y=0) = 30C0\ (0.2)^{0}\ (0.8)^{30} = 0.001$

ملاحظات :

هناك خواص للتوزيع ذي الحدين هي:

١- الوسط الحسابي $\mu = np$

٢- التباين $\sigma^2 = npq$

٣- الانحراف المعياري $\sigma = (npq)^{1/2}$

مثال: في محل للقوالب الإسمنتية الجاهزة، فإذا علم أن ١٠% من القوالب غير صالحة للاستعمال عند اختيار ١٥ قالب من الانتاج جد:

١- أكثر من قالبين غير صالحين للاستعمال.

٢- قالبين أو أقل غير صالحة للاستعمال.

٣- قالبين صالحين للاستعمال.

الحل :

$p = 0.1 \quad q = 0.9 \quad n = 15$

1- $P(y \geq 2) = 1 - P(y < 2) = 1 - (P(y=1) + P(y=0))$

$= 1 - [15C0\ (0.1)^{0}\ (0.9)^{15} + 15C1\ (0.1)^{1}\ (0.9)^{1}]$

2- $P(y \leq 2) = P(y=2) + P(y=1) + P(y=0)$

$= 15C0\ (0.1)^{0}\ (0.9)^{15} + 15C1\ (0.1)^{1}\ (0.9)^{14} + 15C2\ (0.1)^{2}\ (0.9)^{13} = .$

3- $P = 0.9 \quad q = 0.1$

$p(y = 2) = 15C2\ (0.9)^{2}\ (0.1)^{13}$

٢- توزيع متعدد الحدود ***Multinomial Distribution***

وهو امتداد لتوزيع ذي الحدين في n من المحاولات يحدث عدد K من الأحداث E1 , E2 ……… EK باحتمالات P1 , P2 , ……… PK على التوالي . للتعبير عن احتمال حدوث E1 , E2 …EK بعدد X1 , X2 , …XK من المرات بالمعادلة التالية :

$$P(X1, X2, \ldots Xk) = [(N!/X1!\ X2! \ldots XK!)] . (p_1^{x1} . p_2^{x2} \ldots PK^{Xk})$$

حيث أن:-

$$X_1 + X_2 + \ldots\ldots\ldots + X_k = n$$

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots\ldots + p_k = 1$$

العدد الكلي N اصغر او يساوي n .

مثال: صندوق يحتوي على ١٥ كرة، ٣ منها بيضاء و٥ منها حمراء و٧ منها الباقية باللون الأزرق، عند سحب ٥ كرات بصورة عشوائية واحدة بعد الأخرى. جد احتمال أن تكون واحدة باللون الأبيض واثنتان باللون الأزرق واثنتان باللون الأحمر. علماً أن الكرة المسحوبة ترجع إلى الصندوق قبل سحب الأخرى؟

الحل:

احتمالية كرة بيضاء $P(W) = 3/15=1/5$

احتمالية كرة حمراء $P(R) = 5/15 =1/3$

احتمالية كرة زرقاء $P(B) =7/15$

$$P(1W2B2R) = \frac{5!}{1!2!2!}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{7}{15}\right)^2 =$$

ملاحظات :

١. الوسط الحسابي للتوزيع متعدد الحدود (μ) هو npi

٢. التباين للتوزيع هو $\sigma^2 = n\, p_i q_i$.

٣. ***توزيع هندسي زائد*** ***Hyper Geometric Distribution***

في التجارب المتكررة **غير المستقلة** وحجمها N الحاوية على K نجاحات وN-K فشل فإن احتمال وقوع الحادث يتغير في كل محاولة ويسمى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بالتوزيع الهندسي الزائد ويصبح احتمال عدد معين من النجاحات في عينة بحج n يساوي:

$$P(y) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}} \qquad y = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots n$$

ملاحظة: الوسط الحسابي والتباين للتوزيع الهندسي الزائد ي هو:

$$\mu = \frac{nK}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{N-n}{N-1}\, n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)$$

مثال: للمثال السابق إذا فرضنا أنه قد تم السحب بدون إرجاع في الصندوق معتد سحب (٥) كرات جد احتمال أن يكون بينهما ثلاث كرات بلون أزرق؟

الحل: عناصر النجاح $N=15$, $n=5$, $k = 7$

$$P(y) = \frac{\binom{7}{3}\binom{15-7}{5-3}}{\binom{15}{5}} = 0.326$$

مثال: معرض سيارات به ٤٨ سيارة من بينها ٨ سيارات معيبة، اختيرت عينة عشوائياً من ٥ سيارات بدون إرجاع أوجد:

١. احتمال العينة كلها سليمة؟
٢. احتمال أن تكون سيارة واحدة معطوبة؟
٣. احتمال أن توجد بها ثلاث سيارات معيبة على الأكثر .

الحل:

١. نفرض أن y عدد الوحدات المعطوبة في العينة المسحوبة، وبما إن العينة مأخوذة بدون إرجاع من مجتمع (محتوى) N=48 فيه k = 8 سيارات معيبة فإن y تتبع التوزيع الهندسي الزائدي:

حيث:

K = 8 , n = 5 , x = 0 ،N = 48

$$P(y) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}} = P(y=0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{48-8}{5-0}}{\binom{48}{5}} = 0.384$$

٢. حيث:

y =1, n = 5, k = 8, N = 48

$$P(y) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}} = P(y=1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{48-8}{5-1}}{\binom{48}{5}} = 0.427$$

٣. حيث:

y = 0,1,2,3 , n = 5 , k = 8 , N = 48

$$P(y \le 3) = \frac{\binom{K}{y}\binom{N-K}{n-y}}{\binom{N}{n}} = P(y=0) + P(y=1) + P(y=2) + P(y=3)$$

$$P(y \le 3) = 0.384 + 0.427 + 0.162 + 0.0255 = 0.998$$

٤- ***توزيع بواسون*** ***Poisson Distribution***

يستخدم هذا التوزيع في الحوادث النادرة الوقوع كسقوط الأمطار في منطقة صحراوية بعمق كبير أو حدوث فيضان بتصريف معين في النهر أو سقوط جسر بسبب الهزات الأرضية حيث تعتبر هذه الأحداث متغيرات عشوائية. وتسمى التجارب التي تحدث في زمن معين أو منطقة محدودة جداً بتجارب بواسون (Poisson’s Experiments) والمتغير العشوائي يدعى المتغير البواسوني الذي يمثل عدد النجاحات في التجربة البواسونية.

فإذا كان (n) الذي يمثل عدد السنين بالنسبة لسقوط المطر أو الفيضانات أو عدد الجسور المأخوذة بنظر الاعتبار و كان (P) الذي يمثل احتمال الحدث (y) و هو صغير جداً فإن الوسط λ يساوي ***(λ=np)*** فإذا كان الوسط معروف أصبح إمكانية احتساب احتمالية وقوع الحدث بموجب توزيع بواسون .

$$P(y) = \frac{\lambda^{y}.e^{y}}{y!}$$

حيث أن : P(y) احتمال تكرار الحادث (y) ، e=2.7182 .

y = 0,1,2 ……n

ملاحظات:

١- يمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لتوزيع ذي الحدين وبالعكس عندما يكون (p) صغير جداً و(n) قيمة كبيرة.

٢- يكون الحدث نادراً عندما يكون عدد المحاولات (n > 50).

٣- الوسط الحسابي و التباين هو $\mu = \lambda = n\, p$
$\sigma = \lambda$

مثال:- إذا كان ٢٠% من أجهزة المسح معيبة فإذا تم اختيار ٢٠ جهاز جد احتمالية أن تكون (٣) اجهزة منها معيبة ؟

١- باستخدام توزيع ذي الحدين
٢- باستخدام توزيع بواسون؟

الحل:

1- P=0.2 q=0.8, n=20, x=3
$P(x=3)=20\,C3(0.2)^3(0.8)^{17}=0.205=205\%$
2- $= n.p = 20*0.2=4\ \lambda$
$p\,(x=3) = 4^3 * e^{-4} / 3! = 0.195 = 19.5\%$

الفرق بين الجوابين صغير .

الفصل السابع
التوزيعات الاحتمالية المتصلة
Continuous Probability Distribution

التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو التوزيع الذي يأخذ فيه المتغير العشوائي قيما بين حدين ودالته (F(y)) تكون موجبة لجميع قيم (y) بين $\infty<y<+\infty$ ولأي حدث (A) فان:-

$$P(A) = P(y \sin A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y).\,dy$$

وتسمى هذه الدالة بدالة التكرار (frequency function) او دالة كثافة الاحتمال (probability density function) او دالة توزيع الاحتمال (probability distribution function).

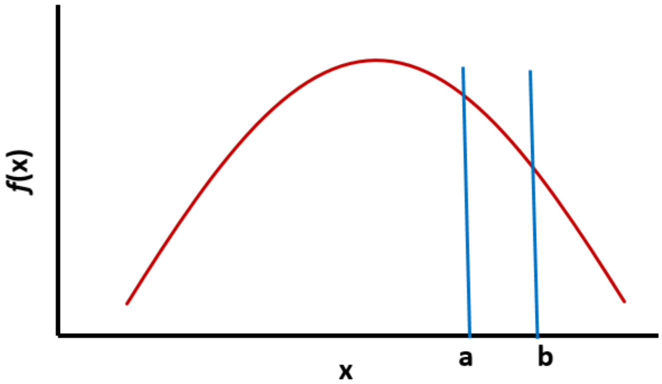
كما وان المتغير العشوائي الخاص بهذه التوزيعات يسمى المتغير العشوائي المتصل حيث انه غير محدد القيمة ويأخذ مدى ضمن تفاوت القيم ومن الأمثلة على ذلك قوة التحمل والاجهادات ومستوى الماء. على سبيل المثال، هناك ما لانهاية من المناسيب لمستوى الماء الذي يأخذه المنسوب. لذلك يكون الاحتمال للحصول على ارتفاع مستوى الماء برقم واحد صغير جدا فيعتبر صفرا لذلك اصبح احتمال ان متغير عشوائي متصل يأخذ رقم واحد صفرا ولذلك يعبر عن معادلة توزيع الاحتمال بدالة التكرار او دالة كثافة الاحتمال ومن مميزاتها :-

١. تكامل هذه الدالة ضمن قيم x يساوي واحد ($-\infty < x < +\infty$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$$

٢. قيمة $f(x)$ موجبة لجميع قيم (x) واحتمال وقوع x بين قيمتين x=a و x=b تساوي المساحة تحت المنحني بين هذين الحدين، والتي تكون قيمتها بين ١ و ٠.

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x).dx = [1\ 0]$$



خلال هذا الفصل نعتبر التوزيع التكراري النسبي توزيع احتمالي للمتغير العشوائي المتصل لذلك سوف يكون الاهتمام بعد رسم المدرج التكراري النسبي إيجاد احسن منحني يطابق ذلك المدرج وبالتالي الحصول على دالة كثافة الاحتمال.

واعتمادا على شكل المنحني فان هناك توزيعات متصلة عديدة منها: -

١.التوزيع الطبيعي.

٢.توزيع .F

٣.توزيع . t

٤.توزيع مربع كاي.

١.التوزيع الطبيعي:- Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث ان اغلب المتغيرات تتوزع توزيعا طبيعيا. كما وان توزيع المعاينة للأوساط يقترب من التوزيع الطبيعي ويزداد هذا التقارب مع زيادة حجم العينة.

تعريف:- المعادلة الرياضية لمنحني التوزيع الطبيعي هي:

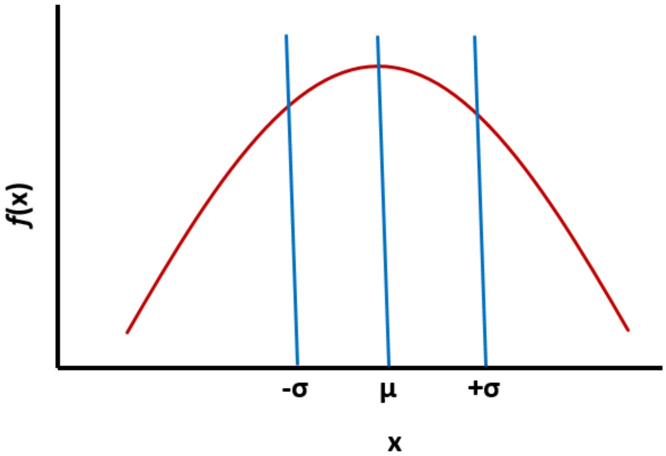
$$N(\mu,\sigma) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\mu}} e^{\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

حيث ان:

(μ) = الوسط الحسابي (σ) = الانحراف المعياري $\boldsymbol{\pi}$ = ٣,١٤

وتسمى معادلة ديموفير او منحني كاوس نسبتا الى العالمين.

ان هذه المعادلة تمثل معادلة المنحني الطبيعي الذي شكله كما في ادناه:

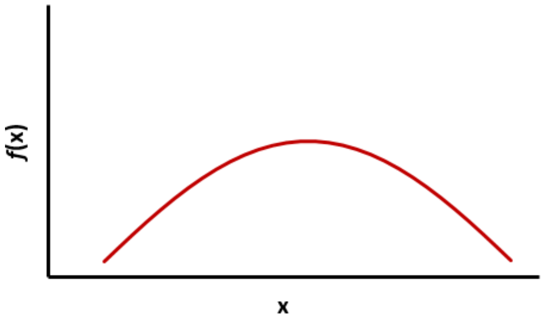


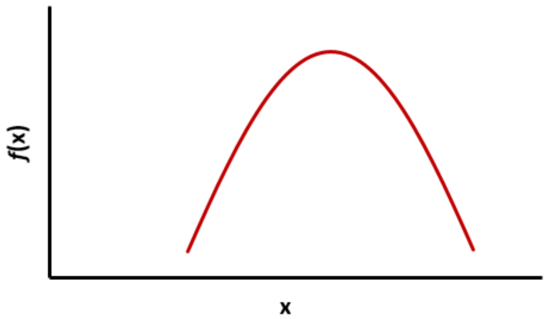
إن هذه المعادلة تصبح معرفة تماما بعد تعيين قيمة الوسط الحسابي والتباين للعينة

ومن مميزاته:

١. شكله يشبه الجرس المقلوب.
٢. منحني متناظر حول الوسط الحسابي.
٣. يكون شكل المنحني مدبب عند ثبوت الوسط الحسابي ونقصان التباين كما وانه يكون أكثر تحدبا إذا قل الوسط الحسابي وزاد التباين وأقرب نحو المحور الصادي.
٤. ان المساحة الكلية الواقعة تحت المنحني تساوي واحد.

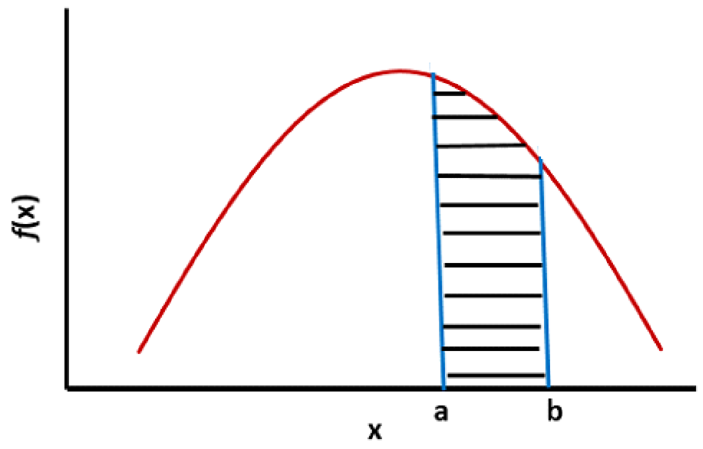
$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\,dx = 1$$





٥. ان المساحة المضللة تحت المنحني بين الاحداثيين a,b تمثل احتمالية وقوع الحدث (x) ضمن الفترة (a,b).

$$P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x).\,dx = [0\ 1]$$



١,١. المتغير المعياري The Standard Deviate

بالإمكان التعبير عن المتغير العشوائي المتصل (x) بدلالة الانحراف المعياري والوسط الحسابي لحساب متغير متصل قياسي (Z) ويستخدم كبديل عن أي متغير عشوائي متصل.

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

عليه تكون معادلة المنحني الطبيعي القياسي هي:

$$N(\mu,\sigma) = N(0,1) = P\left(\left(\frac{x-\pi}{\sigma}\right) < Z_1\right) = \frac{1}{2\pi}\int e^{0.5Z^2}.dz$$

ولحساب احتمال أي حدث يتم ذلك بحساب مساحة المنحني أسفل منحني التوزيع الطبيعي ضمن الفترة المطلوبة للحدث. وكما هو معروف فان لكل منحني طبيعي له وسط حسابي وانحراف معياري معين ولتسهيل هذه المهمة ولتسهيل عملية التكامل حيث أنها تتطلب طرق عددية لحل التكامل ويتم ذلك عن طريق تحويل أي متغير عشوائي متصل إلى متغير عشوائي قياسي (Z) بوسط حسابي يساوي صفر وانحراف معياري مقداره واحد والاستفادة من الجداول الإحصائية في احتساب المساحة أسفل المنحني بموجب حدود الاحتمالية.

مثال: إذا كان المتغير (x) يتوزع توزيع طبيعي بوسط حسابي مقداره ٧٠ وانحراف معياري مقداره ٢٠ جد المساحة تحت المنحني بين القراءات:

١. ٨٠ و١٠٠   ٢. ٥٠ و١٠٠   ٣. ٣٠ و٥٠؟

الحل: إن المساحة تساوي احتمالية وقوع قراءة عشوائية بين هاتين القراءتين

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

1. $Z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma \longrightarrow = 80-70 / 20 = 0.5$

   $Z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma \longrightarrow = 100-70 / 20 = 1.5$

   من الجدول :- $Z = 0.5$ المساحة تحت المنحني = ٠,٦٩١٥

   $Z = 1.5$ المساحة تحت المنحني = ٠,٩٣٣٢

   $P(0.5<Z<1.5) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417$

2. $Z_1 = (x_1 - \mu) / \sigma \longrightarrow = 50-70 / 20 = -1.0$

$Z_2 = (x_2 - \mu) / \sigma \longrightarrow = 110\text{-}70 / 20 = 2.0$

من الجدول :- $Z = -1.0$ المساحة تحت المنحني = ٠,١٥٨٧

$Z = 2.0$ المساحة تحت المنحني = ٠,٩٧٧٢

$P(-1.0<Z<2.0) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185$

3. H.W

مثال:- إذا كانت قوة الخضوع لقضبان التسليح تتوزع توزيعا طبيعيا بوسط حسابي ٤٥ كيلونت وانحراف معياري ٢ كيلونت عند فحص قضيب ما هو احتمال :-

١. قوة مقدارها ٤٣ كيلونت أو أكبر.
٢. قوة مقدارها ٤٧ كيلونت.
٣. قوة بين ٤٤ و٤٦ كيلونت.

ملاحظة:- اعتبر قياس قوة الخضوع الى اقرب كيلونت.

الحل:-

١. إذا كانت القوة مقاسه إلى أقرب كيلونت واحد فان القراءة (٤٣) تشمل جميع القراءات بين ٤٢,٥ و٤٣,٥.

$Z = 42.5 - 45 / 2 = -1.25$

من الجدول المساحة تحت المنحني = ٠,١٠٥٦

$P(Z \geq -1.25) = 1 - 0.1056 = 0.8944 = 89.44\%$

ملاحظة: إذا كان القياس مقرب الى اقرب ٠,٥ كيلونت فان القراءة ٤٣ كيلونت تشمل (٤٢,٧٥-٤٣,٢٥) كيلونت.

$Z = 42.75 - 45 / 2 = -1.125$

اذا المساحة اسفل المنحني = ٠,١٢٩٢

$P(Z \geq -1.125) = 1 - 0.1292 = 0.8708 = 87.08\ \%$

٢. تشمل القراءة ٤٧ جميع القراءات بين (٤٦,٥ – ٤٧,٥) كيلونت.

$Z1 = 46.5 - 45 / 2 = 0.75$ المساحة اسفل المنحني = ٠,٧٧٣٤

$Z2 = 47.5 - 45 / 2 = 1.25$ المساحة اسفل المنحني = ٠,٨٩٤٤

$P(Z1<Z<Z2) = 0.8944 - 0.7734 = 0.121$

٣. H.W (٥٤,٦٨ %).

مثال: اذا كان المتغير x يتوزع توزيعا طبيعيا بانحراف معياري ٢٠ جد الفاصل المتعادل حول الوسط الحسابي بحيث يكون احتمال وقوع حدث في هذه الفاصلة ٩٠%.

الحل: احتمال وقوع القراءة في هذا الفاصل = ٠,٩ = مساحة المنحني

المساحة التي تقع على جانبي (خارج) الحد الفاصل

$1 - 0.9 = 0.1$

المساحة على يسار الفاصلة = المساحة على يمين الفاصلة =

$0.1/2 = 0.05$

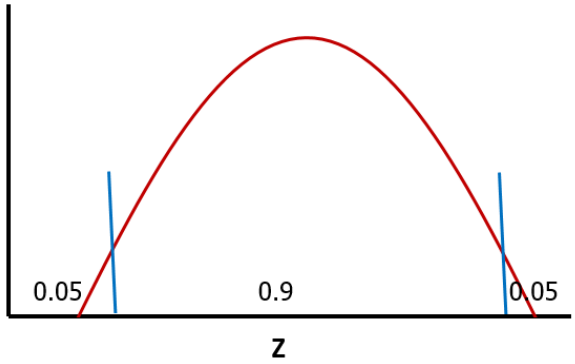
$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

من الجدول قيمة Z عند مساحة تساوي ٠,٩٥ هو ١,٦٤٥ عليه فان:

$$1.645 = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow 1.645 = \frac{x-\mu}{20}$$

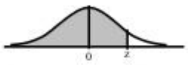
x = μ -32.9

لذا الحد الفاصل هو $\mu \pm$ ٣٢,٩



STANDARD NORMAL DISTRIBUTION

$$P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Chapter 5: Special Distribution 38
Standard Normal Distribution Table

تقريب توزيع ذي الحدين من التوزيع الطبيعي

يمكن استخدام المنحني الطبيعي كتقريب للمدرج التكراري الاحتمالي الناتج من تطبيق المعادلة ذات الحدين ويزداد هذا التقريب كلما كبرت n وقربت P من 0.5 ويكون وسط التوزيع (np) وتباين (npq) .

مثال: في إنتاجية معمل للأبنية الجاهزة احتمالية عدم تطابق العمود الخرساني للمواصفات (٠,٥) فإذا تم اختيار ١٠ أعمدة من خط الانتاج جد :

١. احتمال الحصول على ٧ أعمدة غير مطابقة للمواصفات.
٢. احتمال الحصول على ٤ إلى ٦ أعمدة غير مطابقة للمواصفات .

(باستخدام توزيع ذي الحدين والطبيعي).

الحل:-

$P = 0.5 \quad q = 0.5 \quad n = 10$

$\mu = np = 10*0.5 = 5$

$\sigma = (npq)^2 = 1.58$

١. باستخدام توزيع ذي الحدين

$P = 0.5 \quad q = 0.5 \quad n = 10$

$$P\ (x=7) = 10C7\ p^7\ q^3 = 0.118$$

٠,١١٨ = مساحة المنطقة المضللة للشكل أدناه.

أما في التوزيع الطبيعي فان

$P\ (x = 7) = P\ (6.5<x<7.5)$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$P(x=C) = P[(C-0.5-np)/(npq)^{0.5} <=Z<= (C+0.5-np)/(npq)^{0.5}]$$

$P\ [(6.5-5)/1.85 <=Z<= (7.5-5)/1.85] = p\ (0.95<=Z<=1.67) = \underline{\mathbf{0.124}}$

اذا الفرق بين القراءتين صغير جدا (٠,٠٠٦)

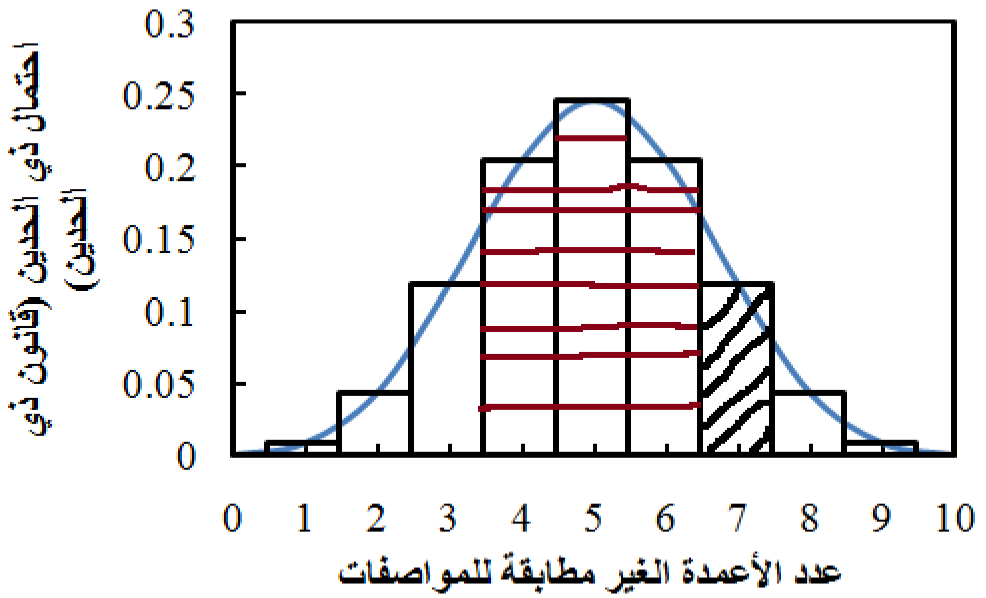
٢. توزيع ذي الحدين

$$P(4<= x<=6)= \Sigma 10Cx\ p^x\ q^{10-x} = 0.656 \qquad x = (4,5,6)$$

أما التوزيع الطبيعي :-

$P(4<=x<=6) = P(3.5<=x<= 6.5) = 0.6578$

اذا الفرق بين الإجابتين صغير جدا.



P = 0.5   q = 0.5   n = 10

علية يكون توزيع الاحتماليل كل الـ عـ يـ نه هو   كما في الجدول أدناه:-

عدد الأعمدة الغير مطابقة للمواصفات	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
احتمال ذي الحدين (قانون ذي الحدين)	٠,٠٠١	٠,٠٠٩	٠,٠٤٤	٠,١١٨	٠,٢٠٥	٠,٢٤٦	٠,٢٠٥	٠,١١٨	٠,٠٤٤	٠,٠٠٩	٠,٠٠١

اختيار التوزيعات للبيانات Test of Distributions for Data

مثال(1): اذا كان معدل القطع الإنشائية المنتجة في معمل معين للأبنية الجاهزة خمسة قطع في الساعة الواحدة الجدول أدناه يبين عدد القطع الغير مطابقة للمواصفات خلال ١٠٠٠ ساعة إنتاجية .جد توزيع ذي الحدين لهذه البيانات ومدى ملاءمتها:-

عدد القطع الغير مطابقة	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد ساعات الانتاج	٣٥	١٥٠	٣٥٠	٣٠٠	١٥٠	١٥

الحل: وسط عدد القطع الغير مطابقة في ساعة تساوي:-

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 2.425$$

الوسط النظري لعدد القطع المنتجة والغير مطابقة للمواصفات في الساعة الواحدة:-

$\mu = np = 5p$

$5p = 2.425 \Longrightarrow p = 0.485$

$$P(x) = nCx\, p^x q^{n-x}$$

$$P(x) = 5Cx(0.485)^{x}\,(0.515)^{5-x}$$

يمكن جدولة النتائج كما في الجدول أدناه ومن خلال النتائج يتبين أن الفرق قليل بين الناتج النظرية والنتائج الفعلية.

عدد القطع الغير مطابق (الفعلي)	عدد القطع الغير مطابق (النظري)=(١٠٠٠*الاحتمال النظري)	الاحتمال النظري (ذي الحدين)	عدد القطع الغير مطابقة (فعلي)
٣٥	٣٦	٠,٠٣٦٢	٠
١٥٠	١٧١	٠,١٧٠٥	١
٣٥٠	٣٢١	٠,٣٢١٣	٢
٣٠٠	٣٠٣	٠,٣٠٢٥	٣
١٥٠	١٤٢	٠,١٤٢٥	٤
١٥	٢٧	٠,٠٢٦٨	٥

مثال(2): بين ملائمة التوزيع الطبيعي للبيانات في الجدول أدناه من خلال مقارنة النتائج النظرية والعملية؟

٤٠-٤٤	٣٥-٣٩	٣٠-٣٤	٢٥-٢٩	٢٠-٢٤	١٥-١٩	١٠-١٤	الصنف
١	٣	٣	٥	٤	٣	١	التكرار

الحل:- الوسط الحسابي يساوي

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = 26.75$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 f_i}{\sum f_i}} = 7.82$$

المتغير الطبيعي القياسي:

$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

يمكن ترتيب البيانات كما في الجدول أدناه.

من مقارنة النتائج النظرية والعملية فان البيانات قريبة من التوزيع الطبيعي أما جودة التوزيع فأنها تدرس في فصل تحليل الارتباط.

التكرار المسجل	التكرار النظري	المساحة لكل صنف	المساحة تحت المنحني	Z	الحد الأدنى الحقيقي	حدود الصنف
1	0.082	0.004	0.014	-2.2	9.5	١٠-١٤

15-19	14.5	-1.57	0.058	0.044	0.886	3
20-24	19.5	-0.93	0.176	0.118	2.360	4
25-29	24.5	-0.29	0.386	0.210	4.194	5
30-34	29.5	0.35	0.637	0.251	5.018	3
35-39	34.5	0.99	0.839	0.202	4.042	3
40-44	39.5	1.63	0.948	0.110	2.191	1
	44.5	2.27			18.773	20

٢. توزيع t :- ***t-Distribution***

في بعض الأحيان يكون حجم العينة صغير ($n<30$) ونتيجة لهذا فان قيم الإحصائيات على سبيل المثال (S,μ) وغيرها تتغير من عينة إلى أخرى وبذلك تكون قيمة ($(\bar{y}-\mu)/S$) لا تتوزع توزيعا طبيعيا وقد حل هذه المشكل العالم كوسيت Gosset واستطاع اشتقاق معادلة للتوزيع سمية توزيع ستودنت Student Distribution أو t-distribution وصحح العالم فشر دالة توزيع الاحتمالية الخاصة بالتوزيع لتصبح الصيغة العامة للدالة هي:

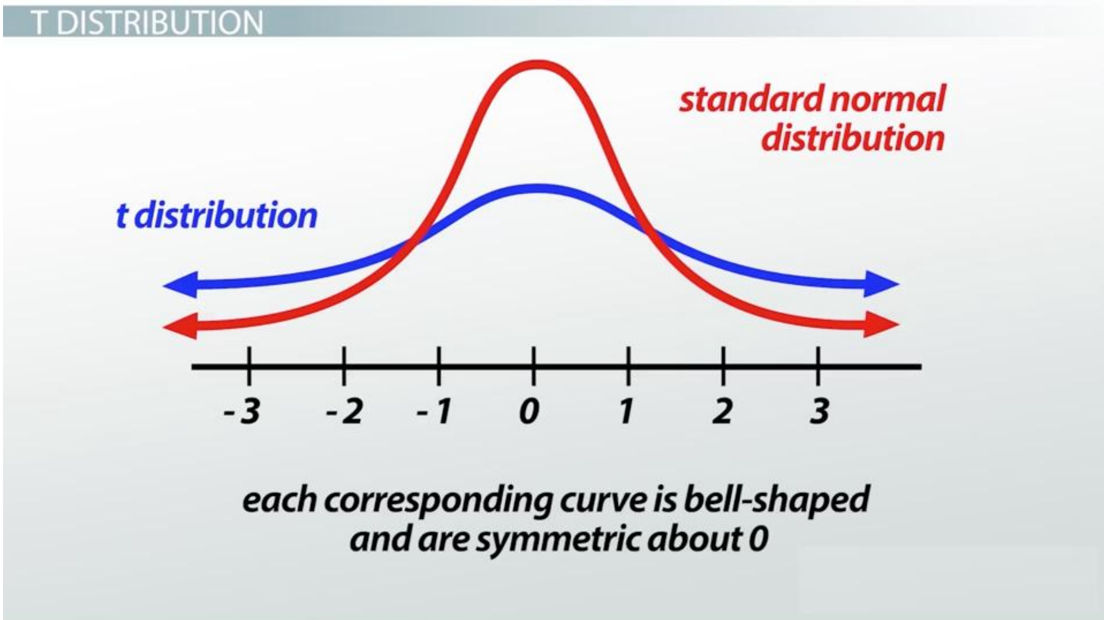
$$f(t) = \frac{C}{\left[1+\left(\frac{t^2}{v}\right)\right]^{0.5-v}}$$

حيث أن:-

C = ثابت يعتمد على درجات الحرية بحيث أن المساحة اسفل المنحني تساوي ١.

V = درجات الحرية (n-1).

وعند رسم المعادلة أعلاه ينتج عنها منحني مشابه للمنحني الطبيعي إلا انه اكثر تفرطحا ومتناظر حول $t=0$.

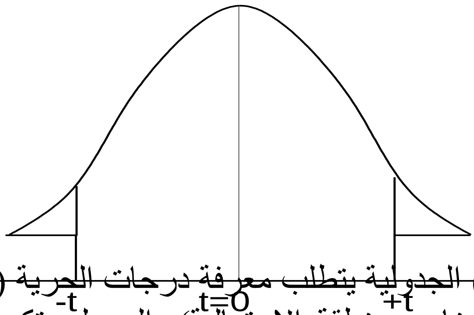


<u>ملاحظة:-</u> يقترب توزيع t من التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينة (n) الى ان يصل الى (∞) او بزيادة درجات الحرية.

لقد تم ترتيب حل هذه المعادلة ووضعت في جداول خاصة لها يتم فيها حساب المساحة تحت منحني التوزيع بعد معرفة درجات الحرية ويعبر عنها بـ ($t \mid \alpha, v \mid$) حيث ان :-

α = المساحة تحت المنحني (مستوى المعنوية).

V = درجات الحرية (n-1).



<u>استعمال جدول t :-</u>

لتعين قيمة (t) الجدولية يتطلب معرفة درجات الحرية (v) ومستوى الاحتمالية (α)

(α = المساحة الواقعة خارج منطقة الاحتمالية). الجدول يتكون من العمود الأول لدرجات الحرية أما عناوين الأعمدة الداخلية هي مساحات الطرف الموجب الأيمن (α) ومتن الجدول قيم t.

v	.... α
.	•
.	•
.	•
.	
.	.... t_{α}

كما ان الجدول t يعطي على شكل طرفين.

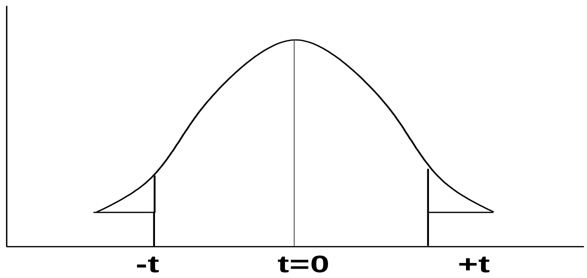
$P(t < -t_{(\alpha,v)}) = P(t > t_{(\alpha,v)})$

مثال:- اذا كان حجم عينة = ١٦ عنصر و $\alpha = 0.5$ جد قيمة (t).

الحل:- درجات الحرية $v = 16-1 = 15$

باحتمال قدره = المساحة تحت المنحني $1-\alpha = 1-0.05 = 0.95$

من الجدول:- $t_{(\alpha/2,v)} = t_{(0.025,15)} = \pm 2.131$



مثال:- إذا كان حجم العينة (١١) عنصر وتتوزع توزيع t أوجد مايلي :-

١. المساحة الواقعة الى يمين ويسار $t = 1.812$.

٢. قيمة t التي تقع يسارها مساحة تساوي ٠,١ .

٣. قيمة $(1-\alpha)$ بحيث ان $t_{(\alpha,v)} = -1.372$.

الحل:-

$v = 11-1 = 10$

1. $t = \pm 1.812 \rightarrow \pm\alpha/2 = 0.025$ المساحة على اليمين = المساحة على اليسار
2. $\alpha = 0.01 \rightarrow t = -2.764$
3. $t = -1.372 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow 1-\alpha = 1-0.1 = 0.9$

٣. توزيع مربع كاي (χ^2):- Chi-Square Distribution

في بعض الأحيان يكون المنحني التكراري النسبي لبعض العينات غير متماثل حول الوسط الحسابي بل يحتوي على درجة من الالتواء. كما وان توزيع هذه العينات هو متصل (مستمر) اول من وصف هذه التوزيعات المستمرة هو كارل بيرسن بحدود (١٩٠٠) وسمي بتوزيع كاي.

ان دالة كثافة الاحتمال لتوزيع كاي هي:-

$$f(\chi^2) = C\,(\chi^2)^{0.5v-1}.e^{(-0.5\chi^2)}$$ ***χ^2 اكبر من الصفر***

حيث أن :- v = درجات الحرية

C = ثابت يعتمد على درجات الحرية بحيث تكون المساحة اسفل المنحني = صفر.

ملاحظات:-

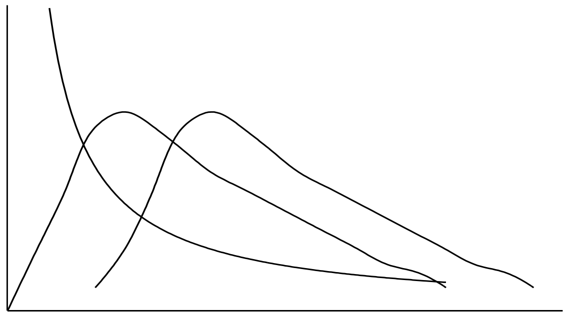
١ . ان قيمة χ^2 تكون موجبة على الدوام.

٢ . له معلمة واحدة هي (v) درجات الحرية.

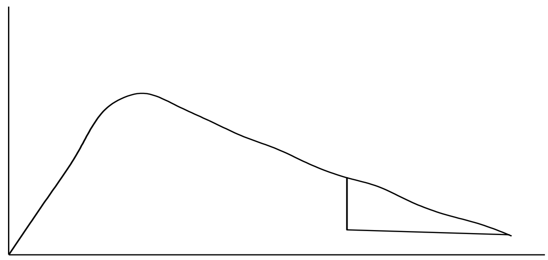
٣ . منحني ملتوي التواء موجب.

٤ . يقترب توزيع χ^2 من التوزيع الطبيعي مع زيادة درجات الحرية.

٥. *الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع كاي هو:-* $\mu = v \quad \sigma = ٢v$



٦. يمكن احتساب قينة χ^2 من الجدول اعتمادا على درجات الحرية (α,v) χ^2 حيث يعطي قيمة المساحة الى يمين قيمة (χ^2).



v	α	0.995 0.99 0.975 ……………
	١ ٢ ٣ . . .	. . . . …………………… χ^2 (α,v)

<u>**مثال:-**</u> إذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها (١٦) عنصر تتوزع توزيع كاي اوجد مايلي:-
١. المساحة الواقعة الى يمين ويسار $\chi^2 = 6.262$.
٢. قيمة χ^2 التي تقع يسارها مساحة ٠,٩٥ .

<u>**الحل:-**</u> $v = 16-1 = 15$

1. $\chi^2 = 6.262$, $v = 15 \rightarrow \alpha = 0.975$ المساحة الى اليمين
المساحة الى اليسار $= 1- \alpha = 1- 0.975 = 0.025$
2. $1- \alpha = 0.95 \rightarrow \chi^2 = 24.9968$.

٤ <u>*توزيع F :-*</u> ***F- Distribution***

يعتبر توزيع F من أهم التوزيعات المستخدمة في الإحصاء التطبيقي. ويعتبر العالم فشر اول من وصف هذا التوزيع عام (١٩٢٠) وسمية توزيع (F) نسبتا اليه.

دالة كثافة الاحتمالية لهذا التوزيع هي:-

$$f(F) = C.F^{0.5\,(v1-2)} / (v2+v1F)^{(v1+v2)/2} \qquad f > 0$$

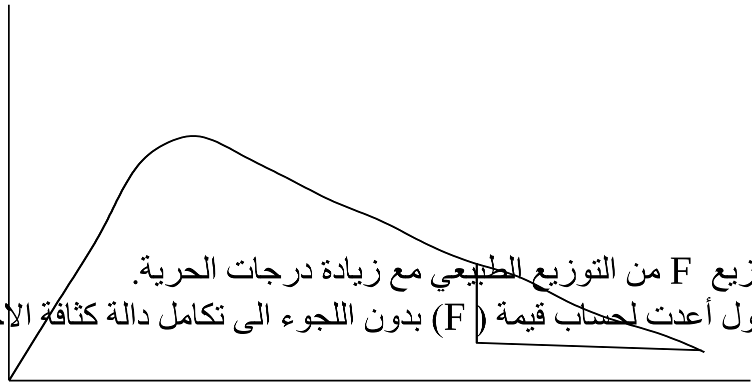
C = ثابت يعتمد على v1, v2 بحيث تكون المساحة تحت المنحني تساوي واحد.
v1,v2 = درجات الحرية للبسط والمقام على التوالي.
v1 = n1-1 v2 = n2 – 1
كما ويعرف توزيع F بأنه النسبة بين مربع كاي لتوزعين مستقلين مقسومين على درجات الحرية.

$$F = (\chi^2 1/v1) / (\chi^2 1/v2)$$

ملاحظات:-

١. يتسم توزيع F بانه غير متناظر بل ملتوي نحو اليمين.
٢. لهذا التوزيع معلمتان هما v2,v1 وعند معرفتهما يعين قيمة (F) .
٣. متوسط توزيع (F) وتباين هما:-

$$\mu = v2/(\,v1-2) \qquad \sigma = {}^{٢}\, v2(v1 + v^{٢}\text{-}٢)/\ v1\ (1-2)^2(v2-4)$$



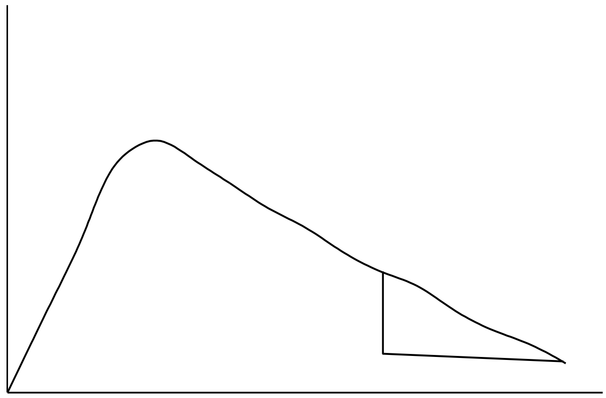
٤. يقترب توزيع F من التوزيع الطبيعي مع زيادة درجات الحرية.
٥. هناك جداول أعدت لحساب قيمة (F) بدون اللجوء الى تكامل دالة كثافة الاحتمال.

استخدام جدول F :-

يتكون جدول F من العمود الأول الذي يمثل قيم v2 وعناوين الأعمدة الداخلية تمثل قيم v1 أما قيم الجدول فتمثل قيم (F) ويكون اكبر من واحد ويعبر عن قيم F التي تكون مساحتها نجو يمين قيمة (F) هي (α) وبدرجات حرية (v1,v2) بالصيغة ***F(α,v1,v2)*** كما في الشكل أعلاه.

مثال:- إذا كانت قيمة v1=10 ,v2 = 12 أوجد مايلي:-
١. المساحة الواقعة الى يمين ويسار F = 2.7534 .
٢. قيمة F F(0.1,v1,v2).
٣. قيمة F F(0.96,v1,v2).
الحل:-

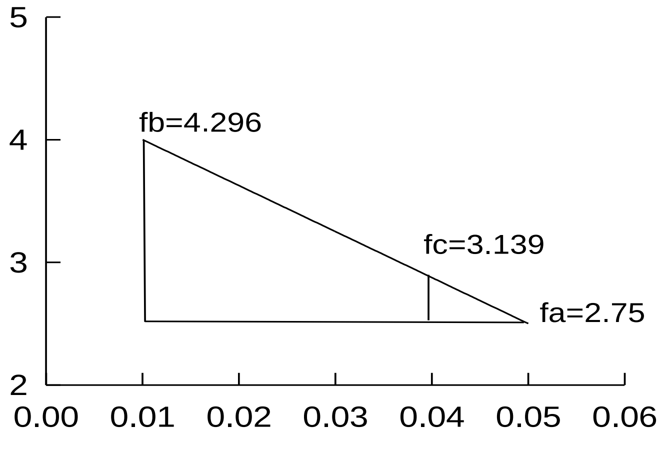
1. F = 2.7534 → α = 0.05 من الجدول
1 – α = 1-0.05 = 0.95



2. $F(0.01,10,12) \rightarrow F = 4.296$ من الجدول
3. $Fa\ (0.05,10,12) \rightarrow F = 2.7534$ من الجدول
$Fb\ (0.01,10,12) \rightarrow F = 4.296$ من الجدول
$Fb - Fa = 4.296 - 2.7534 = 1.543$
$Fc = [(Fb-Fa)*0.01/(0.05-0.01)] + Fa = 3.139$.

استخدامات التوزيعات المتصلة:-

١. تقدير فترة الثقة للوسط الحسابي والفرق بين الأوساط والنسب.
٢. اختبار الفرضيات حول الوسط الحسابي والنسب.



الفصل الثامن
نظرية المعاينة:- Sampling Theory

عند دراسة مشكلة معينة يتطلب ذلك جمع بيانات خام (Raw Data) المتعلقة بالمشكلة. ان تجميع البيانات يكون عن طريق المسح الشامل التي يؤخذ بها جميع عناصر المجتمع أو بطريقة العينات التي يؤخذ بموجبها جزء من عناصر المجتمع. ان طريقة المسح الشاملة تكون مكلفة جدا او مستحيلة على الأغلب.ومن اجل الوصول الى نتيجة لاتخاذ القرار يتم اللجوء الى نظرية المعاينة.

وكما هو معروف فان العينة جزء من المجتمع وعن طريق دراسة هذه العينات يستدل على خواص المجتمع الذي أوخذت منه .وبذلك تستخدم إحصائيات العينة للدلالة على إحصائيات المجتمع.لذلك فنظرية المعاينة تربط بين المجتمع والعينات التي أوخذت منه.إذ يمكن الاستدلال على وسط وتباين المجتمع من وسط وتباين العينة.

ومن اجل الوصول الى استدلال إحصائي جيد لابد من الحصول على عينات ممثلة (represintive samples) للمجتمع وهذا يتطلب معرفة طرق الحصول على العينات أي تصميم التجربة (design of experiment) او تصميم العينة (design of sample) .

هذا وهناك عدة طرق لتصميم واختيار العينة:-

١. المعاينة العشوائية:- Random Samples
٢. المعاينة النظامية:- Systematic Samples
٣. المعاينة الطبقية:- Stratified Samples
٤. المعاينة المتعددة المراحل:- Multi - Stage - Samples

توزيع المعاينة:- *Sampling Distribution*

التوزيع الاحتمالي للإحصائيات يدعى بتوزيع المعاينة لتلك الإحصائيات كما وان الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة للإحصائيات يدعى بالخطاء القياسي للإحصائيات (Standard Error).

فعند اخذ عينات كل منها بحجم (n) من مجتمع بحجم (N) عندئذ يمكن حساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري ......الخ لكل عينة وهذه الإحصائيات تتغير من عينة الى اخرى لذلك يمكن الحصول على توزيع المعاينة لكل إحصائية ،فعلى سبيل المثال اذا كانت هذه الإحصائيات هي الوسط الحسابي ($\bar{X}$) يسمى التوزيع بتوزيع المعاينة للاوساط وبالمثل توزيع المعاينة للانحراف المعياري او التباين. هناك نظريات تربط بين معلمتي الوسط الحسابي والانحراف المعياري في توزيع المعاينة:-

النظرية (١):- عند اخذ عينة بحجم (n) من مجتمع يخضع الى توزيع بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) فان:-

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n$$ **اذا كان حجم العينة كبير**

$$\text{or } \sigma^2_{\bar{x}} = [\sigma^2/n](N-n)/(N-1)$$ **اذا كان حجم العينة صغير**

حيث ان :- $\mu_{\bar{x}}$ = الوسط الحسابي لتوزيع المعاينة.

$\sigma^2_{\bar{x}}$ = التباين لتوزيع المعاينة.

ملاحظة:- اذا كانت قيمة (N-n)/(N-1) تقترب من واحد فان هذا يعني ان المجتمع كبير وغير محدد.

نظرية (٢) :- اذا كان هناك مجتمعان مستقلان الاول وسطه (μ_1) وتباينه (σ^2_1) والثاني وسطه (μ_2) وتباينه (σ^2_2)، واخذت عينتان بحجم (n_1) من المجتمع الاول (n_2) من المجتمع الثاني على التوالي عليه فان توزيع المعاينة للفرق بين ($\bar{X}$ - $\bar{Y}$) والمجموع ($\bar{X}$ + $\bar{Y}$) وكذلك الفرق والمجموع للتباين هو:-

$$\mu_{\bar{x}\pm\bar{y}} = \mu_{\bar{x}} \pm \mu_{\bar{y}} = \mu_1 \pm \mu_2$$

$$\sigma^2_{\bar{x}\pm\bar{y}} = (\sigma^2_1/n) + (\sigma^2_2/n)$$

$$\text{or } \quad \sigma^2_{\bar{x}\pm\bar{y}} = (\sigma^2_1/n)(N-n)/(N-1) + (\sigma^2_2/n)\,(N-n)/(N-1)$$

حيث ان :- N_1,N_2 هو حجم المجتمع الاول والثاني.

مثال:- من اجل الحصول على الدقة، فقد اخذت عدة قياسات لكل من مسافتين حيث كان الوسط ٢٢٥٠ م للمسافة الاولى و ١٢٢٥ م للمسافة الثانية مع انحراف معياري ٠,٤ م و ٠,٣ م لكل منهما على الترتيب. احسب الوسط والانحراف المعياري ل:-

١. لمجموع المسافتين؟	٢. للفرق بين المسافتين؟.

الحل:-

1. $\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = \mu_{\bar{x}}+\mu_{\bar{y}} = 2550+1225 = 3775$ m

$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = [(\sigma^2_1/n) + (\sigma^2_2/n)]^{0.5} = [(0.4)^2 + (0.3)^2]^{0.5} = 0.5$ m

2. $\mu_{\bar{x}-\bar{y}} = \mu_{\bar{x}}-\mu_{\bar{y}} = 2550-1225 = 1325$ m

$\sigma_{\bar{x}+\bar{y}} = [(\sigma^2_1/n) + (\sigma^2_2/n)]^{0.5} = [(0.4)^2 + (0.3)^2]^{0.5} = 0.5$ m

ملاحظة:- يمكن معرفة توزيع $(\bar{x}\pm\bar{y})$, $\bar{x}$ من خلال نظريات النهايات الملركزية:-

١. توزيع المعاينة للاوساط :- (Sampling Distribution Means)

يمكن توزيع المعاينة للاوساط بموجب النظريات التالية:-

النظرية(٣):- احذ عينات من مجتمع احصائي

أ.إذا كان (σ) معلومة:-

عند اخذ عينات بحجم (n) من مجتمع إحصائي يخضع الى توزيع بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2) فان توزيع الوسط الحسابي $(\bar{X})$ يخضع الى التوزيع الطبيعي تقريبا بوسط حسابي (μ) وتباين $(\sigma^2/2)$ شرط ان يكون حجم العينة كبير $(n\geq30)$ فان المتغير المعياري (Z) يتوزع توزيع طبيعي تقريبا:-

$$Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n}$$

ب.إذا كان (σ) مجهولة:-

في حالة كون (σ) مجهولة للمجتمع يستخدم بدلا عنها الانحراف المعياري للعينة (S) عليه يكون توزيع المتغير المعياري (Z) قريب من التوزيع الطبيعي في حالة تحقق شرط $(n\geq30)$.

$$Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n}$$

اما في حالة كون $(n<30)$ فان التوزيع يخضع الى توزيع (t) وبدرجات حرية $(n-1)$.

النظرية(٤):- (اخذ عينات من مجتمع طبيعي).

أ- اذا كان (σ) معلومة:-

في حالة اخذ عينات بحجم (n) من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma)$ فان توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات $(\bar{X})$ يخضع الى التوزيع الطبيعي بصورة دقيقة .ويكون المتغير العشوائي (z) يتوزع توزيع طبيعي دقيق:-

$$Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n}$$

ب.إذا كان (σ) مجهولة:-(بغض النظر عن حجم العينة)

اذا كان (σ) مجهولة يستخدم الانحراف المعياري للعينة (S) ويكون توزيع المتغير المعياري $[(\bar{x}-\mu) / S/\sqrt{n}]$ يخضع الى توزيع (t) وبدرجات حرية $(n-1)$.

مثال:- تم تصميم احدى الجسور لعبور المشات ليتحمل ٥٠٠٠ كغم ويتسع لوقوف ٥٠ شخصا فاذا كانت الاوزان للاشخاص موزعة توزيع طبيعي بوسط حسابي ٧٥ كغم وانحراف معياري ١٠ كغم ماهي احتمالية فشل الجسر؟.

الحل:-يحصل الفشل اذا كان مجموع وزن الاشخاص اكثر من ٥٠٠٠ كغم

$P[(\sum xi > 5000)] = P(\bar{X} > (5000/50) = P(\bar{X} >100)$

$\mu = 75 \quad \sigma = 10$

$Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n}$

$Z = (100 – 75) / (10/\sqrt{50}) = 25/\sqrt{2}$

$P (Z>25/\sqrt{2}) = 0.035$ من الجداول

مثال:- اذا أخذت عينة بحجم (٩) عناصر من مجتمع طبيعي وسطه (٧٣) ، فوجد ان الانحراف المعياري يساوي (١٢) احسب احتمال ان يزيد وسط هذه العينة عن ٨٠؟.

الحل:- σ للمجتمع مجهولة علية يستخدم قيم ($S = 12$) كما وان المجتمع طبيعي التوزيع عليه يستخدم توزيع (t) (نظرية ٤-ب).

$F(t) = (\bar{x}-\mu) / S/\sqrt{n}$

$P(x \geq 80) = P(t \geq (\bar{80}-73) / 12/\sqrt{9}] = (P \geq 1.85)$

$(P \geq 1.85) = 1 - (P < 1.85) = 0.05$ من الجداول

٢ . توزيع المعاينة لفرق او مجموع الوسطين:-

Sampling Distribution of Differences or Sums of Two Sample Means

نظرية(٥):- اخذ عينات من مجتمعين احصائيين:-

أ.اذا كان (σ_2 , σ_1) معلومتان:-

عند اخذ عينات بحجم (n_1) من مجتمع احصائي وسطه (μ_1) وتباين (σ^2_1) وعينة اخرى بحجم (n_2) من مجتمع احصائي اخر مستقل وسطه (μ_2) وتباين (σ^2_2) فان توزيع المتغير المعياري (Z) يخضع الى توزيع طبيعي تقريبي بشرط ان سكون حجم العينات اكبر من ٣٠ .

$$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+ (\sigma^2_2/n_2)}]$$

$$Z = [(\bar{x}+\bar{y})-(\mu_1+\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+ (\sigma^2_2/n_2)}]$$

ب.اذا كان (σ_2 , σ_1) مجهولتان:-

اذا كان (σ_2 , σ_1) مجهولتان يستخدم عوضا عنها الانحراف المعياري للعينتان (S_1,S_2)ويكون توزيع المتغير المعياري خاضع الى توزيع (t) وبدرجات حرية مقدارها (n_1+n_2-2)

$$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)]/[Sp\sqrt{(1/n_1)+ (1/n_2)}]$$

$$Z = [(\bar{x}+\bar{y})-(\mu_1+\mu_2)]/[Sp \sqrt{(1/n_1)+ (1/n_2)}]$$

حيث ان (Sp^2) هو التباين المتجمع كما احذ سابقا.

نظرية(٦):- اخذ عينات من مجتمع احصائي طبيعي

عند اخذ عينات بحجم (n_1) من مجتمع طبيعي وسطه (μ_1) وتباين (σ^2_1) وعينة اخرى بحجم (n_2) من مجتمع طبيعي اخر مستقل وسطه (μ_2) وتباين (σ^2_2) فان توزيع المتغير المعياري (Z) يخضع الى توزيع طبيعي دقيق.

$$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)}]$$
$$Z = [(\bar{x}+\bar{y})-(\mu_1+\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)}]$$

مثال:- للمكعبات الخرسانية من سمنت الخط الاول متانتها ١٢٠ وحدة وانحرافها المعياري ١٥ وحدة وللخط الثاني متانتها ١٠٠ وحدة وانحرافها المعياري ١٠ وحدات فاذا تم اخذ عينتين عضشوائيتين حجم كل منها ٣٠ مكعب من كل خط واجري عليها فحص المتانة جد احتمال ان تكون متانة المكعبات للخط الاول اكبر من الخط الثاني بـ:-

١. ١٢ وحدة ؟ ٢. ٢٥ وحدة ؟

الحل:- ليكن μ_2,μ_1 متانة المكعبات للخط الاول والثاني على التو\الي

$\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = \mu_1+\mu_2 = 120-100 = 20$

$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)} = 3.29$

$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)}]$ اذا المتغير المعياري لفرق الاوساط

$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-20]/ 3.29$

1. $P(Z \geq Z = [12-20]/ 3.29) = P(Z \geq -2.43) = 99.25$ من الجداول

2.H.W (0.0643)

مثال:- اذا كان جهاز قياس اجهاد القص يعطي نتائج بحيث يكون الانحراف المعياري (٤) باسكال فاذا قام طالبان بقياس هذه الاجهادات على انفراد واخذ كل منهما (٢٠) قراءة ووجد كل منهما وسط احهاد القص من هذه القراءات جد الاحتمال الذي يكون فيه الفرق بين النتائج لقياس الوسط اكثر من (٢,٥٣) باسكال اعتبر التوزيع للقراءات توزيعا طبيعيا ؟.

الحل:- ليكون $\bar{x}$, $\bar{y}$ وسط القراءة للطالب الاول والثاني.

$(x-y) = 2.53$

$\mu_{\bar{x}+\bar{y}} = \mu_1+\mu_2 = 0$

$\sigma_{\bar{x}-\bar{y}} = \sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)} = \sqrt{4^2/20 + 4^2/20} = 1.265$

$Z = [(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)]/[\sqrt{(\sigma^2_1/n_1)+(\sigma^2_2/n_2)}] = (2.53 - 0)/1.265 = 2$

$P((\bar{x}-\bar{y}) \geq Z) = P(Z \geq 2.0) = 1- P(Z < 2) = 0.0228$

٣. *توزيع المعاينة للتباين:-* *Sampling Distribution Variance*

نظرية (٧):- عند اخذ عينات بحجم (n) من مجتمع طبيعي وسطه (μ) وتباين (σ^2) وحسب التباين (S^2) لكل عينة فان توزيع التباين للعينة يخضع الى توزيع مربع كاي وبدرجات حرية (n-1).

$$X^2 = [(n-1) S^2]/\sigma^2$$

مثال:- عند اخذ عين بحجم (١٦) من مجتمع طبيعي تباينه (٩) جد احتمال ان يكون تباين العينة اقل من او يساوي (١٥)؟.

الحل:-

$X^2 = [(n-1)\ S^2]/\sigma^2 = [(16-1)\ 15^2]/9^2 = 25 \approx 24.996$ من الجدول

$X^2\ (\alpha,\nu) = 24.996 \rightarrow \nu = 15 \rightarrow \alpha = 0.95$

٤. توزيع النسبة بين تباين عينتين S^2_1/ S^2_2:-

Distribution of Two Sampling Variance

نظرية (٨):- اذا كان هناك مجتمعان طبيعيان كبيران الاول وسطه (μ_1) وتباين (σ^2_1) والثاني وسطه (μ_2) وتباين (σ^2_2).فاذا كان هناك S^2_1, S^2_2 تباين عينتان سحبت من المجتمع الاول والثاني على الترتيب فان توزيع المعاينة للنسب بين التباينين يخضع الى توزيع (F) وبدرجات حرية $(v_1 = n_1-1)$ و $(v_2 = n_2-1)$.

$$F = (S^2_1/ S^2_2) * (\sigma^2_1/ \sigma^2_2)$$

مثال:- تم اخذ عينات بحجم ١٣و١٦ من مجتمعين طبيعيين ،جد احتمال ان تكون النسبة بين تباين العينتين اقل من اويساوي (٢,٤٨)؟.

Sol.:-

$F(\alpha,\nu_1, \nu_2) = 2.48$

$v_1 = 13-1 = 12 \qquad v_2 = 16-1 = 15$

$F(\alpha,12, 15) = 2.48 \rightarrow \alpha = 0.05$

$1-\alpha = 1 - 0.05 = 0.95$ نسبة الاحتمالية

٥. توزيع المعاينة للنسب:- *Sampling Distribution of Proportion*

نظرية (٩):- عند اخذ عينات عشوائية ذات حجم (n1) من مجتمع ذي الحدين الذي وسطه الحسابي $(\mu = np)$ وتباين $(\sigma^2 = npq)$ فتوزيع المعاينة لـ (P^o) هو قريب من توزيع الوسط الحسابي بوسط حسابي $(\mu p^o = p)$ وتباين $(\sigma^2\ p^o = pq/n)$.

$(P^o = y/n$ نسبة النجاحات)

وبذلك فان قيمة المتغير الطبيعي القياسي هو :-

$$Z = (P^o - P) / \sqrt{pq/n}$$

٦. توزيع المعاينة لفرق او لمجموع النسب:-

Sampling Distribution of Proportion Differences or Sum

نظرية (١١):- عند اخذ عينتان مستقلتان بحجم (n1) و (n2) من مجتمعي ذي الحدين بوسط حسابي وتباين على التوالي:-

$\mu_1 = n_1p_1 \qquad \mu_2 = n_2p_2$

$\sigma^2_1 = n_1p_1q_1 \qquad \sigma^2_2 = n_2p_2q_2$

فان توزيع المعاينة لفرق النسب $(P^o_1 - P^o_2)$ و المجموع $(P^o_1 + P^o_2)$ تخضعان لتوزيع طبيعي بصورة تقريبية.

$\mu_1-\mu_2 = p_1 - p_2$

$\mu_1+\mu_2 = p_1 + p_2$

$\sigma (P^o_1 \pm P^o_2) = \sqrt{p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2}$

$Z = [(P^o_1 \pm P^o_2) - (P_1 \pm P_2)] / \sqrt{p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2}$

حيث ان Z قيمة من قيم المتغير الطبيعي القياسي.

مثال:-أذا كان (٥%) من الحفارات هيدروليكية و (٩٥%) سلكية فعند اختيار ٤٠ حفارة جد الاحتمال الذي يكون فية:- ١) ٨% او اكثر هيدروليكية؟ ٢) ٣% او اقل هيدروليكية؟.

الحل:-

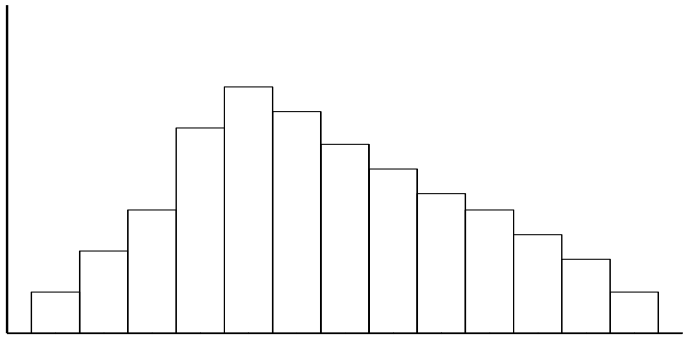
$\mu p^{o} = p = 0.05$

$\sigma p^{o} = \sqrt{pq/n} = 0.0487$

وحيث ان توزيع الحفارات توزيع متقطع (ذي الحدين) ولتحويل هذا التوزيع الى توزيع متصل نستخدم الوحدة المعيارية للتصحيح ($1/2n$)

$1/2n = 1/(2*40) = 0.0125$

1. $Z = (0.08-0.0125-0.05)/0.0487 = 0.359 \rightarrow P(Z \geq 0.359) = 0.36$
2. $Z = (0.03+0.0125-0.05)/0.0487 = -0.154 \rightarrow P(Z \leq -0.154) = 0.388$



مثال:- وجد في خط الانتاج الاول ان نسبة القطع الانشائية المعيبة (٣٠%) وفي الخط الثاني (٢٥%) فاذا اخذت عينتان بحجم (١٠) قطع من الاولى و (١٥) من الثاني جد احتمال:-

١. ان يكون الفرق بين القطع المعيبة للعينتين اقل من (١٠%)؟.
٢. ان يكون مجموع النسب بين القطع المعيبة للعينتين اكثر من (١٠%)؟.

الحل:-

$\mu_1 - \mu_2 = p_1 - p_2 = 0.3 - 0.25 = 0.05$

$\mu_1 + \mu_2 = p_1 + p_2 = 0.55$

$\sigma (P^{o}_1 \pm P^{o}_2) = \sqrt{p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2} = 0.183$

1. $P(p_1 - p_2 \leq 0.1) = (Z \leq (0.1 - 0.05)/0.183 = P(Z \leq 0.273) = 0.61$
2. H.W (0.39) .

تطبيقات:-

مثال(١):- اذا كان في احد المشاريع الاروائية هناك (٥٠٠٠) فحص للكثافة النسبية موزعة توزيع طبيعي بوسط حسابي قدره (٢,٦٥) وانحراف معياري (٠,٥) .عند اختيار ١٠٠ عينة كل منها لها (٢٥) فحص فما هو :-

١. الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع المعاينة؟.
٢. كم عينة يمكن ان تكون كثافتها النسبية بين (٢,٥-٢,٧٥)؟.
٣. كم عينة تكون كثافتها اقل من (٢,٤٥)؟.

الحل:-

1. $\mu_{\bar{x}} = \mu = 2.65$

$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 0.5/\sqrt{25} = 0.1$

2. $Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n} = (\bar{x}-2.65) / 0.1$

$Z1 = (2.5 - 2.65) / 0.1 = -1.5 \rightarrow 0.0668$ من الجداول

$Z1 = (2.75 - 2.65) / 0.1 = 1.0 \rightarrow 0.8413$ من الجداول

$P(-1.5 \le Z \le 1) = 0.8413 - 0.0668 = 0.7745$

*اذا عدد النماذج هو = ١٠٠*٠,٧٧٤٥ = ٧٧ نموذج*

3. H.W (23).

مثال(٢):- اذا كان (٤٠%) من اجهزة الانتاج لاتحتوي على صمام السيطرة فعند سحب مائة جهاز جد الاحتمال الذي يكون فيه:-

١. (٥٠-٧٠) % حاوية على صمام السيطرة؟
٢. (٨٠%) او اكثر حاوية على صمام السيطرة؟.

الحل:-

١. الطريقة الاولى:-

$p = 1-q = 1-0.4 = 0.6$

$\mu = np = 100*0.6 = 60$

$\sigma = \sqrt{pqn} = 4.9$

٥٠% من العدد المسحوب = ٥٠ جهاز

٧٠% من العدد المسحوب = ٧٠ جهاز

بما ان توزيع المعاينة للمجتمع ذي الحدين قريب من التوزيع الطبيعي وان عدد الاجهزة متقطع لذلك فان عدد الاجهزة يكون (٤٩,٥ – ٧٠,٥) للتوزيع المتصل.

$Z = (\bar{x}-\mu) / \sigma/\sqrt{n} = (\bar{x}-60) / 4.9$

$Z1 = (49.5-60) / 4.9 = -2.14$ from table A = 0.0162

$Z2 = (70.5-60) / 4.9 = 2.14$ from table A = 0.9838

$P(49.5 \le x \le 70.5) = P(-2.14 \le Z \le 2.14) = 0.9838 - 0.0162 = 0.9676$

الطريقة الثانية:- استخدام عامل التصحيح ($1/2n = 1/200 = 0.005$)

$\mu p^o = p = 0.6$

$\sigma p^o = \sqrt{pq/n} = 0.049$

$Z = (P^o \pm (1/2n) - P) / \sqrt{pq/n}$

$Z1 = (0.5-0.005-0.6)/0.049 = -2.14$ from table A = 0.0162

$Z2 = (0.7+0.005-0.6)/0.049 = 2.14$ from table A = 0.9838

$P(50 \le x \le 70) = P(-2.14 \le Z \le 2.14) = 0.9838 - 0.0162 = 0.9676$

مثال(٣):- اذا كان توزيع عمر نضائد السيارات لاحدى الشركات قابل للتوزيع بوسط حسابي (١٠٠٠) يوم وانحراف معياري (١٠٠) يوم جد احتمال ان يكون لعينة بحجم (١٦) بطارية وسط حسابي اكبر من ١٠٥٠ يوم؟ (H.W).

الفصل التاسع

نظرية التخمين:- Estimation Theory

نظريـة المعاينـة اسـتخدمت فـي الحصـول علـى معلومـات حـول العينـات وفـي هـذا الفصـل تستخدم هذه المعلومـات لتخمين معـالم المجتمـع . حيث ان توزيـع ذي الحدين يعتمـد علـى معلمـة واحـدة وهـي (P) نسـبة النجاحـات وبواسـون علـى الوسـط (λ) والتوزيـع الطبيعـي علـى الوسـط الحسابي والانحراف المعياري (μ,σ) وعادتا تكون هذه المعالم مجهولة.

١. **التخمين والمخمن :- Estimate and Estimator**

كل قيمة تحسب من العينة تسمى تخمينا والطريقة المستخدمة في التخمين يسمى مخمن. علـى سبيل المثال تستخدم طريقة الوسط كمخمن لحساب وسط المجتمع فتكون القيمة المحسوبة من العينة تخمينا والوسط مخمنا.

٢. **عدم الانحياز :- Unbaisdness**

عندما يكون وسط توزيع المعاينة لإحدى الإحصائيات مساويا الى معلمة المجتمع المرادفـة لـه لتلك الإحصائية عند ئذ يعتبر ذها الوسط مخمنا غير منحازا او القيمة المرادفة له تخمينا غير منحازا على سبيل المثال توزيع المعاينة لـ (μ_x) يساوي وسط المجتمع (μ) لذا يعتبر وسط العينة (X^-) تخمينا غير منحاز لوسط المجتمع.اما خلاف ذلك يشار اليه مخمنا منحازا مثال ذلك توزيع المعاينة للتباين غير مساوي الى تباين المجتمع (σ^2).

$$\mu_s^2 = [(n-1)/n]\ \sigma^2$$

٣. **الكفاءة والكفاية والتواؤم :- Efficiency ,Sufficiency and Consistency**

يشـار إلـى المخمـن ذي التبـاين الأصـغر بـالمخمن الكفـوء امـا المخمـن ذي التبـاين الاكبـر بالمخمن غير الكفوء والقيمة المرادفة بالنسبة لـلأول والثـاني بـالتخمين الكفـوء والتخمـين الغير كفـوء علـى الترتيـب. علـى سـبيل المثـال الوسـط الحسـابي والوسـيط مخمنـين غيـر منحـازين لوسط المجتمـع ولكـن تبـاين الوسـط (σ^2/n) اصـغر مـن تبـاين الوسـيط الـذي يساوي (σ^2/n) (π/2)) لذلك فالوسط اكفأ تخمينا امـا الكفايـة فتشـير الـى شـمولية المخمـن فالوسـط (X^-) للعينـة اكثـر كفايـة فـي تخمـين الوسـط (μ) للمجتمـع مـن الوسـيط. وذالـك لشمولية الوسط اثناء اخذ العينات على جميع البيانات. أما التواؤم فيشير الى عدم حصـول اختلاف جوهري بين قيمة المخمن وقيمة المعلمة عند زيادة حجم العينة.

ملاحظة:- المخمن الجيد الذي يحمل خصائص الكفاية والكفاءة والتواؤم.

٤. **التخمين بنقطة او بمجال:- Point or Interval Estimation**

هناك نوعان من التخمين

الاول:- التخمين بنقطة والذي يشير الى تخمين بقيمة واحدة على سبيل المثال معدل الكثافة النسبية لنموذج من للتربة (٢,٦٥).

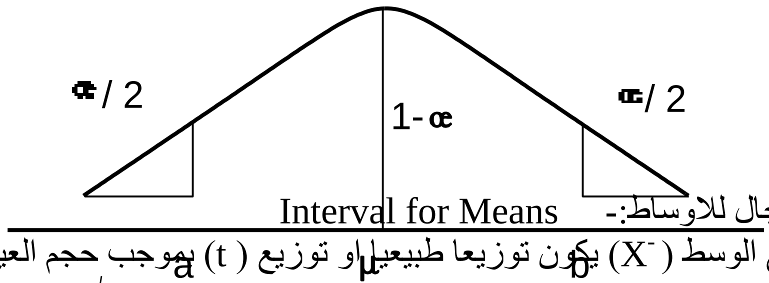
الثاني:-التخمين بمجال ويكون على شكل فترة حيث ان قيمة المعلمة تاخذ مدى من الارقالم على سبيل المثال قيمة الكثافة النسبية لنموذج من للتربة في احدى المشاريع يتراوح (٢,٦-٢,٧٨) لذلك يذكر تخمين المجال باحتمال معين على سبيل المثال ٩٨% .

٥. مستوى الثقة:- *Confidence Level in Estimation*

هو احتمالية وقوع معلمة المجتمع ضمن مجال معين ويرمز له بـ ($1 - \alpha$) حيث ان :-
α = احتمالية عدم وقوع المعلمة في هذا المجال.فاذا كان (a , b) الحد الاعلى والادنى للمجال فان :-

$P(a <$ المعلمة $< b) = 1- \alpha$

ويعبر (b-a) الفترة للمعلمة او قياس دقة التخمين .
($1 - \alpha$) = قياس الثقة او الاحتمالية لوقوع المعلمة ضمن الفترة (b-a).

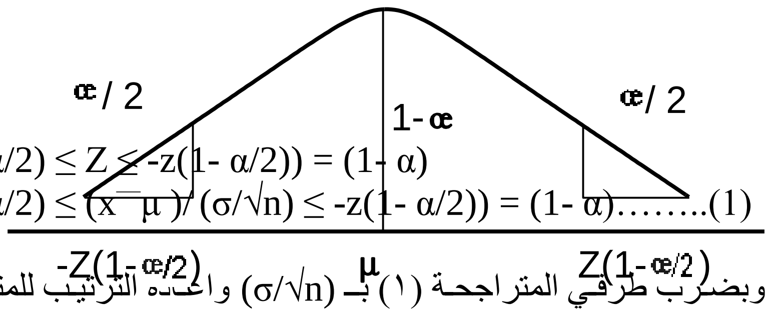


١,٥ المجال للاوساط:- Interval for Means

ان توزيع الوسط ($\bar{X}$) يكون توزيعا طبيعيا او توزيع (t) بموجب حجم العينة.

$$Z = (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$$

وبموجب البند السابق واعتمادا على ميتوى الثقة فان هناك حد اعلى وادنا للفترة.



$$P(-z(1- \alpha/2) \le Z \le -z(1- \alpha/2)) = (1- \alpha)$$
$$P(-z(1- \alpha/2) \le (\bar{x} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \le -z(1- \alpha/2)) = (1- \alpha) \ldots\ldots..(1)$$

ملاحظة:- وبضرب طرفي المتراجحة (١) بـ ($\sigma/\sqrt{n}$) واعادة الترتيب للمتراجحة تكون النتيجة النهائية:-

$$P[\bar{x}-z(1- \alpha/2)(\sigma/\sqrt{n})] \le \mu \le [\bar{x}-z(1- \alpha/2)(\sigma/\sqrt{n})] = (1- \alpha) \ldots\ldots..(2)$$

والمتراجحة (٢) هي النهائية لتقدير فترة الوسط للمجتمع وبموجب مستوى المعنوية ($1- \alpha$) وهناك نظريات توضح طبيعة التوزيع.

نظرية (١):- *أخذ عينات من مجتمع احصائي:-*

أ- اذا كانت (σ) معلومة و (μ) مجهولة:-

اذا أخذت عينة عشوائية $x_1, x_2, \ldots. x_n$ من مجتمع طبيعي فان المجال % ($1- \alpha$) لفترة ثقة الى (μ) هو :-

$$[\bar{x}-z(1- \alpha/2)(\sigma/\sqrt{n})] \le \mu \le [\bar{x}-z(1- \alpha/2)(\sigma/\sqrt{n})]$$

حيث ان $z(1- \alpha/2)$ قيمة من قيم المتغير الطبيعي القياسي.

ب- اذا كانت (σ) و (μ) مجهولتان:-

اذا أخذت عينة عشوائية $x_1, x_2, \ldots. x_n$ من مجتمع طبيعي وكانت (σ و μ) للمجتمع مجهولتان يستخدم بدلا عنها (S) الانحراف المعياري للعينة فان المجال % ($1- \alpha$) لفترة ثقة الى (μ) هو :-

$$[\bar{x}-t(1-\alpha/2,v)\ (S/\sqrt{n})] \le \mu \le [\bar{x}-t(1-\alpha/2,v)\ (S/\sqrt{n})]$$

حيث ان $t(1-\alpha/2,v)$ قيمة من قيم المتغير لتوزيع t بدرجات حرية (v) ومستوى ثقة . $(1-\alpha/2)$

ملاحظة:- يتضح من النظرية ان المجال يساوي:-

التخمين بنقطة ± (معامل الثقة) X (الخطأ المعياري).

<u>مثال:-</u> تم قياس مستوى سطح الارض لاحد المشاريع في (٤٠) نقطة من مجموع (١٠٠٠) نقطة فوجد ان وسط الارتفاعات (٣٨,٤٨) متر فادا كان الانحراف المعياري لعموم ارتفاع سطح الارض $^{1/2}$(١٠) متر. جد المجال لـ (٩٥%) ثقة لمستوى سطح الارض في المشروع؟.

<u>*الحل:-*</u>

from table $z(1-\alpha/2) = 1.96$ @ 95%

$\sigma =$ (١٠)$^{1/2}$ $\mu =$ مجهولة

$[\bar{x}-z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n})] \le \mu \le [\bar{x}-z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n})]$

$39.48 - [1.96 * (10/40)^{1/2}] \le \mu \le 39.48 + [1.96 * (10/40)^{1/2}]$

$37.5 \le \mu \le 39.46$ or $[37.5, 39.46]$

$P(37.5 \le \mu \le 39.46) = 0.95$

<u>مثال:-</u> اذا كان الانحراف المعياري للنقاط في المثال اعلاه $^{1/2}$(١٠,١) متر جد المجال لـ ٩٥% ثقة ؟.

<u>*الحل:-*</u>

μ, σ مجهولتان.

$1-\alpha/2 = 0.975$, $v = n-1 = 39$ $S = (10.1)^{1/2}$

from table of (t) $\rightarrow$ $t(0.975,39) = 2.023$

$[\bar{x}-t(1-\alpha/2,v)\ (S/\sqrt{n})] \le \mu \le [\bar{x}-t(1-\alpha/2,v)\ (S/\sqrt{n})]$

$38.48 - 2.023\ (10.1/40)^{1/2} \le \mu \le 38.48 + 2.023\ (10.1/40)^{1/2}$

$37.48 \le \mu \le 39.50$ or $[37.48, 39.50]$

٣. *حجم العينة:-* *Size of Sample*

النظرية (١) لـ (أ،ب) تبين ان هناك اختلاف بين الوسط الحسابي للعينة ($\bar{X}$) وللمجتمع (μ) وان قيمة هذا الاختلاف هي ***$[Z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n})]$*** او ما يسمى بالخطاء (e) بين ($\bar{X}$) و(μ).

$$e = Z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n})$$

ولتحديد قيمة هذا الخطاء (e) وجعله مساويا الى قيمة معينة يتم تحديد حجم العينة بموجب ذلك .

$$n = [Z(1-\alpha/2).(\sigma)/e]^2$$

ملاحظة:- في حالة كون (σ) مجهولة يعوض عن (S) للعينة.

<u>مثال:-</u> للمثال السابق ماهو عدد النقاط المختاره بحيث لايزيد الخطاء عن (٠,٤) متر لثقة ٩٥% ؟.

<u>*الحل:-*</u>

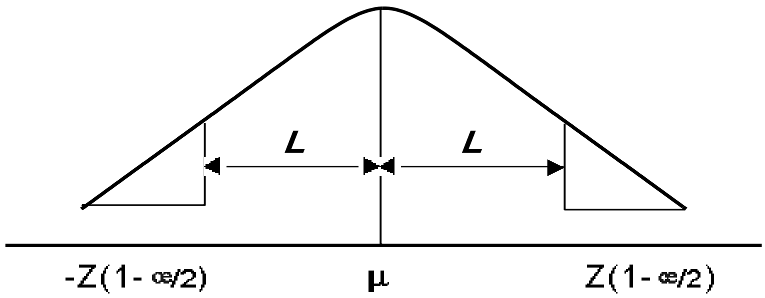
from table $Z(1-\alpha/2) = 1.96$ $\sigma = (10)^{1/2}$ $e = 0.4$

$n = [Z(1-\alpha/2).(\sigma)/e]^2$

$n = [1.96 * (10)^{1/2} / 0.4]^2 = 240.1$
$n = 241$ نقطة

مثال:- ماهو حجم العينة التي يجب اخذها من مجتمع طبيعي وسطه(μ) وتباينه (١٦) بحيث لايزيد طول مجال الوسط عن (٣) لثقة ٩٥% ؟.
الحل:-
طول المجال = 2L = ٣

$L \le \boldsymbol{Z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n})}$
$2L \le 2Z(1-\alpha/2)\ (\sigma/\sqrt{n}) \rightarrow 3 \le 2*1.96 * (\sqrt{10})/n$
$n = 28$



٣,٥ المجال للنسب (فترة الثقة للنسب):- _ Confidence Interval for Proportion

نظرية (٢):- (أخذ عينات من مجتمع ذي الحدين).
أذا أخذت عينة عشوائية $X_1,X_2,\ldots\ldots X_n$ من مجتمع ذي الحدين فان المجال لـ (1- α) 100% ثقة الى نسبة المجتمع (P) هو:-

$P(-z(1-\alpha/2) \le Z \le -z(1-\alpha/2)) = (1-\alpha)\ldots\ldots(1)$
$Z_p = (P^o - P)/\sqrt{pq/n}\ \ldots\ldots..(2)$

وبتعويض (٢) في (١) واعادة تبسيط المعادلة فان المعادلة النهائية لفترة الثقة للنسب تكون :-

$\boldsymbol{P[P^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{pq/n}] \le P \le [P^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{pq/n}] = (1-\alpha)}$

حيث ان :- p = نسبة المجتمع وفي حالة كونها مجهولة تستبدل بـ P^o شرط ان يكون حجم العينة كبير.

$\boldsymbol{P[p^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{p^oq/n}] \le P \le [p^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{p^oq/n}] = (1-\alpha)}$

مثال:- عند فحص (٢٠٠) انبوب من انابيب الرشح وجد ان (٤٠) انبوب مثقب بصورة خاطئة جد المجال للنسب الحقيقية للانابيب المثقبة بصورة خاطئة في عموم انتاجية المعمل لـ (٩٥ %) ثقة ؟.
الحل:-

$p^o = 400/200 = 0.2$
$z(1-\alpha/2) = z(0.975) = 1.96$ (حجم العينة كبير)
$(\sigma/\sqrt{n}) = \sqrt{p^oq/n} = \sqrt{0.2*0.8/200} = \sqrt{0.0008}$
$[p^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{p^oq/n}] \le P \le [p^o-z(1-\alpha/2)\sqrt{p^oq/n}]$
$[0.2 - (1.96)(\sqrt{0.0008})] \le P \le [0.2 + (1.96)(\sqrt{0.0008})] = [0.145, 0.225]$

٤,٥ المجال للفرق والمجموع (فترة ثقة للفرق أو المجموع):-

Confidence Interval for Sum and Difference

النظرية (٣):- أخذ عينات من مجتمع طبيعي:-

أ- أذا كانت σ1 ، σ2 معلومتان .

عند أخذ عينة عشوائية $X_1,X_2,\ldots X_n$ من مجتمع طبيعي وسطه (μ ١) وتباينه (σ1) وعينة اخرى عشوائية $Y_1,Y_2,\ldots Y_n$ من مجتمع طبيعي وسطه (μ ٢) وتباينه (σ2) فان المجال لثقة (α -1) 100% للفرق والمجموع بين الوسطين هو:-

$$[(\bar{x}-\bar{y}) - z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}] \le (\mu_1-\mu_2) \le [(\bar{x}-\bar{y}) + z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}] = (1-\alpha)\ldots\ldots\ldots(1)$$ (للفرق)

$$[(\bar{x}+\bar{y}) - z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}] \le (\mu_1+\mu_2) \le [(\bar{x}-\bar{y}) + z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}] = (1-\alpha)\ldots\ldots\ldots(2)$$ (للمجموع)

ب- أذا كانت σ1 ، σ2 مجهولتان.

عندما يكون (σ1 ، σ2) مجهولتان نستخدم عوضا عنها الانحراف المعياري للعينة (S1 ، S2) على الترتيب ويكون المجال لثقة (α -1) 100% للفرق والمجموع بين الوسطين هو:-

$$[(\bar{x}-\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)}\ S_p\sqrt{(1/n_1+1/n_2)}] \le (\mu_1-\mu_2) \le [(\bar{x}-\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)}\ S_p\sqrt{(1/n_1+1/n_2)}]\ldots\ldots\ldots(1)$$ (للفرق)

$$[(\bar{x}+\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)}\ S_p\sqrt{(1/n_1+1/n_2)}] \le (\mu_1-\mu_2) \le [(\bar{x}+\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)}\ S_p\sqrt{(1/n_1+1/n_2)}]\ldots\ldots\ldots(1)$$ (للمجموع)

حيث ان :-

$v = n_1 + n_2 - 2$

S_p = التباين المتراكم (معروف سابقا).

<u>مثال:-</u> من اجل قياس الكثافة النسبية لتربة احد المشاريع الاروائية في منطقتين أخذت عينتان بحجم (١٠٠) من كل منطقة فكان وسط الكثافة للعينتين (٢,٧٥,٢,٦) على التوالي فأذا كان الانحراف المعياري للكثافة النسبية للمنطقتين (٠,٢) جد المجال لثقة (٩٥%) للفرق بين الوسطين ؟.

<u>الحل:-</u>

$\bar{X} = 2.75$, $\bar{Y} = 2.6$ $\rightarrow \bar{X} - \bar{Y} = 0.15$

$\sigma1 = \sigma2 = 0.2$, $n1 = n2 = 100$, $z(1-\alpha/2) = 1.96$

$$[(\bar{x}-\bar{y}) - z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}] \le (\mu_1-\mu_2) \le [(\bar{x}-\bar{y}) + z(1-\alpha/2)\ \sqrt{(\sigma_1/n_1)^2+(\sigma_2/n_2)^2}]$$

$$[0.15-1.96*\sqrt{(0.2/100)^2+(0.2/100)^2}] \le (\mu_1-\mu_2) \le [0.15+1.96*\sqrt{(0.2/100)^2+(0.2/100)^2}] =$$

$[0.09 \le (\mu_1-\mu_2) \le 0.21]$ or $[0.09,0.21]$.

<u>مثال:-</u> للمثال اعلاه أذا كان التباين للكثافة النسبية للعينتين هما (٠,٠٦٢٥ ، ٠,٠٩) على التوالي جد المجال لثقة (٩٥%) للفرق ؟.

الحل:-

$S_p^2 = [99(0.0625) + 99(0.09)]/198 = 0.07625$

$t(1-\alpha/2, v) = t(0.975,198) = 1.972$

$[(\bar{x}-\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)} S_p\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}] \le (\mu_1 - \mu_2) \le [(\bar{x}-\bar{y}) - t_{(1-\alpha/2,v)} S_p\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}]$

$0.15-1.972(0.07625)^{1/2} (1/\sqrt{50}) \le (\mu_1 - \mu_2) \le 0.15+1.972(0.07625)^{1/2} (1/\sqrt{50})$

$[0.073 \le (\mu_1 - \mu_2) \le 0.227]$ or $[0.073, 0.227]$

نظرية (٤):- أخذ عينات من مجتمع ذي الحدين.

عند أخذ عينة عشوائية $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ من مجتمع ذي الحدين و عينة اخرى عشوائية $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ مستقلة من مجتمع ذي الحدين فان المجال لـ $(1-\alpha)$ 100% ثقة للفرق $(p_1 - p_2)$ هو :-

$$[(P_1^o - P_2^o) - Z(1-\alpha/2) \sqrt{(p_1^o q_1^o/n_1 + p_2^o q_2^o/n_2)}] \le P_1 - P_2 \le [(P_1^o - P_2^o) - Z(1-\alpha/2) \sqrt{(p_1^o q_1^o/n_1 + p_2^o q_2^o/n_2)}]$$

شرط ان يكون n1,n2 كبيرتان.

مثال:- من خلال فحص مائة بئر في كل من جانبي سهل معين تبين ان عدد الابار ذات المياه الصالحة للشرب (