المحاضرة 6

اختلاف التباين

1.6 مقدمه

2.6 اختلاف التباين

3.6 طرق كشف اختلاف التباين

4.6النتائج المترتبه على انتهاك فرض التباين

5.6تصحيح النموذج

6.6 طريقة المعالجة للتخلص من مشكلة اختلاف التباين

7.6 تطبيقات

1.5 مقدمه نموذج الانحدار والمعادلة الاساسيه إلى نحو ما يلي:

$$Y_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i X_i + u_i$$

وهناك مجموعه من الفروض فيما يختص بذلك النموذج:

1 -إن وســط العشوائيات = الصفر $E(u)=0$

2 -إن تباينها = σ^2

3 -إن التغاير بين القيم الخاصة بالعناصر العشوائية = الصفر($COV(u_i\ u_j)$

4 -إن ε تتوزع حســب التوزيع الطبيعي.

5 -إن X غير عشوائية .

هذه إجمالي الفروض التي يعتمد عليها نموذج الانحدار البســيط.

هذه الفروض استخدمت لتبسيط معالجة الانحدار، لكن في الواقع إن كثيرا من هذه الفروض لا يستوفى، بعضها أو أحيانا كلها.

إذا تم خرق آي من الفروض تظهر مشــكله عدم استطاعة تطبيق طرق الانحدار العادية مثل المربعات الصغرى العادية. بدون الأخذ في الاعتبار طبيعة الفرض الذي لم يستوفي في الاعتبار، فعلى سبيل المثال في كثير من الدراســات نلاحظ إن فرض الوســط = الصفر، هذا قد لايتم استيفائه فيترتب عليه أشياء معينه فيما يختص بتطبيق طرق الانحدار وفيما يختص بالخصائص التي تمتلكها المقدرات المتحصل عليها عند تطبيق طرق الانحدار. كذلك الفرض الخاص بثبات التباين في كثير من الدراسات الاقتصادية، فرض غير مقبول لأنه محدد ومقيد اكثر من اللازم، ومن ثم لايتم استيفائه أيضا وتظهر بالتالي عندنا مشكلة معينه لابد من أخذها في الاعتبار عندما تجرى عملية التقدير . الفرض الخاص بالتغاير في كثير من الدراســـات الاقتصادية التي تعتمد على الســلاسل الزمنية يعتبر فرض مقيد اكثر من اللازم وفي الواقع كثير لا يستوفى وبالتالي تظهر مشكله لابد من أخذها في الاعتبار. فقط التوزيع الطبيعي في كثير من الحالات قد يكون فرض مقبول.

الغرض من تلط الفروض هو تبسيط التحليل، لمعالجة نموذج الانحدار ندخل شئ من الواقعية لذلك سوف نأخذ الحالات التي يمكن إن يخرق فيها هذه الفروض وما يترتب على ذلك فيما يختص بخصائص تلك المقدرات، نعرف إن مقدرات المربعات الصغرى تتسم بالخطية وعدم التحيز والكفاءة لكن هل تستمر هذه الخصائص عندما يتم خرق فرض من تلك الفروض أو اكثر هل سيستمر مقدرات م ص ع تتحلى بهذه الخصائص المرغوبة إما إنها ستفقد هذه الخصائص أو بعض منها.

2.5 اختلاف التباين Heterskedasticity من الفروض التي استخدمناها في نموذج الانحدار البســيط. For all $V(u_i) = \sigma^2$

حيث إن الوســـط يســـــــاوي الصفر فان $E(u_i) = \sigma^2$

أي أننـا افترضـنا ثبـوت التبـاين. Homoskedasticity هـذا الفـرض لا يعـد مشـــــكله فـي الدراســات المتعلقـة بالســـلاسل الزمنيـة، حيث إن X عـادة تكـون فـي نفس الترتيب وكـذلك Y مثـال:الاستهلاك الكلـي إذا رتبنـا مستويات معينـه لمـدة 20 سـنه ماضـيه وكـذلك الـدخل قد توافـق فرض ثبات التباين. ولكن عندما نتعامل مع الاقتصـاد الجزئـي، حيث أن المشــاهدات تتباعد عن بعضـها بطريقه مختلف. مثـال الـدخل والنفقـات، فرض الثبـات يختـل فـي هـذه الحالـة حيث توجد تباين قليل في المستويات Y المنخفضة من الدخل بينما يوجد تباين كبير في المستويات المرتفعة. إذا رســمنا البيانـات يتوقـع أن يحصـل علـى شـكل انتشـــار وتزايـد التشـتت كلمـا ارتفـع مسـتوى الدخل كذلك في الدراسات الجزئية مثل دراسات دوال الطلب ودوال التكاليف، الإنتاج.

في تلك الدراسات يأتي خرق ثبات التباين لأن هذه الدراسات تعتمد.علـى الدراســات المقطعيـة Cross section(بيانات تجمع في فتره زمنية واحده لعدد من الواحدات الاقتصـادية) إذا حصـل تفاوت في الدخل يحصل تفاوت في استهلاك السلع معناه إن تباين المتغير التابع ليس بالثابت.

اســتخدمنا النموذج التالي:

$$Y_i = \alpha_i + \beta X_i + u$$
$$E(u_i) = 0$$
$$V(u_i) = \sigma_i^2$$

حيث Y الإنفاق على السلعة وX متغير الدخل إذا افترضنا إن التباين ثابت فان هذه الفرض غير صحيح.

$$\sigma_i^2 \neq \sigma_2^2 \neq \sigma_3^2 \dots \neq \sigma_n^2$$

3.5 طرق اكتشـــاف اختلاف التباين:

يمكن اكتشاف اختلاف التباين برسم القيم المقدره للبواقي مـع قيم X . اذا كـان هنـاك شكل منـتظم يوضح اختلافات في التباين فاننا نتوقع وجود لختلاف التيـاين . ويمكـن اسـتخدام تحليـل الانحـدار لاختبار اختلاف التباين.

لاختبار الفرضية التي تقول إن النموذج مخلف التباين

$$H_0:\sigma_i^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2....=\sigma_m^2 \quad m\geq n$$

اختبار بارك The Park Test

$$H_0:\sigma_i^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2....=\sigma_m^2$$

الفرضية البديله ان التباين مختلف.

يفترض هذا الاختبار ان σ دالة للمتغيرZ.

$$Var(u_i)=\sigma^2 Z_i^2$$

حيث تمثل σ تباين البواقي، و Z العامل النسبي. يعتبر اختبار بارك طريقة لاختبار اختلاف التباين ويتم ذلك باتباع الخطوات التاليه:

1 - تقدر معادلة الانحدار بطريقة المربعات الصغرى وتحسب البواقي.

$$Y=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+u$$

$$u=Y-\beta_0-\beta_1X_1-\beta_2X_2$$

2 - تقدر لوغاريتمات البواقي وتحسب كمتغير تابع في معادلة تتضمن Z كمتغير نسبي، يتم اختياره حسـب الدراسة.

$$ln(u^2)=\alpha_0+\alpha_1 lnZ_i+\nu$$

واختبار معنوية المتغير Z بايجاد t ومقارنتها بـt الجدولية وقبول او رفض فرضية العدم.

اختبار جولدفيلد-كوندات Goldfeld-Quandt Test

يعتمد هذا الاختبار على تقسيم المشاهدات حسب الترتيب التصاعدي للتباين إلى قسمين ونحسب مقدرة التباين لكل قسم ونقارن بين مقدرتي التباين ونختبر

فرضية العدم: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$

أي انه اختبار تساوي التباين بين الجزئين من العينة هذه الاختبار يعتمد على النسبة بين التباين والتي تعتمد على توزيع F حيث يتم حساب التباين لكل جزء من العينة حيث يكون اختبار جولد فلد-كواندت

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}\sim F_{n2-2,n1-2}$$

حيث $\sigma_1^2 = \frac{\sum (Y-\hat{\alpha}_2 - \hat{\beta}_2 X_i^2)}{(n_1 - 1)}$ و $\sigma_2^2 = \frac{\sum (Y-\hat{\alpha}_2 - \hat{\beta}_1 X_i^2)}{(n_2 - 1)}$

يقترح جولد كواندت ترتيب البيانات الخاصة بالمتغير المستقلX والذي ترتبط معه التباين تصاعديا آو تنازليا مع حذف $P=n/3$ مشاهده من الوسط ويجري تقدير انحدارين منفصلين الأول للعينة التي تشمل القيم الصغيرة من σ^2 والتي يبلغ عددها $n_1 = \frac{n-P}{2}$والتباين التي تشمل القيم الكبيرة من σ^2 والتي يبلغ عددها $n_2 = \frac{n-P}{2}$ ثم تؤخذ نسبة مجموع مربعات البواقي في الانحدار الثاني إلى مجموع مربعات البواقي في الانحدار الأول وذلك للحصول على القيمة المحسوبة للإحصاء

$$F = \frac{ESS_2 /(n_2 - k)}{ESS_1 /(n_1 - k)} \sim F_{n1-k,n2-k}$$

ونقارنها بالقيمة الجد وليه حيث نرفض أو نقبل فرضية العدم هذه اختبار ليس قوي لذلك فهو يقترح إن يستخدم للأوضاع حيث يمكن ترتيب المشاهدات من اصغر قيمه إلى أكبر قيمه وهذا يكون عندما يكون هناك علاقة بين المتغيرX واختلاف التباين.

اختبار وايت White test: يتضمن انحدار مربعات البواقي على المتغيرات المستقله ومربعاتها X^2,X^3 ..

$$u^2 = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X^2$$

يعتمد على مقارنة تباين العينة لمقدرات م ص ع تحت ثبات التباين واختلاف التباين عندما يكون فرض العدم صحيح تكون المقدرات في العينات الكبيرة مختلفة. يعتبر اختبار وايت تعديل لبروس حيث لا يستلزم الفرض الطبيعي حيث إذا كانت العشوائي لا يتوزع طبيعيا يمكن تطبيق اختبار وايت.

الإحصائي المحسوب يتم التوصل أليه من خلال الخطوات التالية :

1 -قدر الانحدار التالي:

$$Y = \beta_0 + \beta_2 X_{t2} + \beta_2 X_{t2} + \beta_{t3} X_{t3} + u_t$$

2-يحسب مربع البواقي ويجرى الانحدار المســـاعد

$$u^2 = \gamma_0 + \gamma_1 X_{t2} + \gamma_2 X_{t3} + \gamma_3 X_{t2}^2 + \gamma_4 X_{t3}^2$$

3-ويحسب معامل التحديد للانحدار المســـاعد والذي يسمى nR_W^2

5- نقوم بحساب القيمة المحسوبة للاختبار والتي تساوي $nR_W^2 \sim \chi_p^2$ حيث n عدد المشاهدات في انحدار وايت.

إذا كان النموذج يمتلك ثبات التباين معنى ذلك ليس هناك تأثير من المتغيرات X على التباين وإذا لم يكن هناك تأثير من ناحية متغيرات X على التباين نتوقع جمع المتغيرات X لا تلعب آي دور آو تلعب دورا قليل جدا في تفسير التباين الذي يحصل عليه من u نفس المنطق السابق إن R_W^2 لابد إن يكون قليل لان معامل التحديد تساوي SSR/SST فإذا كان البسط قليل النتيجة ستكون قليلة وإذا كان معامل التحديد قليل معناه الإحصاء المحسوب قليل مما يؤدي الى قبوب فرضية العدم.

5.5 النتائج المترتبة على انتهاك فرض التباين:

-مقدرات م ص ع لمعالم الانحدار غير متحيزة ويمكن إثبات أنها تتميز لالتساق لكنها لسوء تفقد بقية الخواص من كفاءه وكفاءه تقارب يه وهناك نتيجة مهمة وهي إن تباين م ص ع σ^2 متحيز وهذا آمر خطير لان هذه المقدرات تدخل في حساب فترات الثقة وفي أجراء الاختبارات المعنوية وإذا كانت متحيزة فالاختبارات ألم تحصل عليها من اختبارات المعنوية ستكون غير صحيحه.

تباين مقدرة م ص ع لتباين المعلمة β تحت فرض ثبات التباين تساوي

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i}$$

هذه المقدرة إذا ثبت إن النموذج لا يعاني من اختلاف التباين يكون هذا التباين صحيح، ويمكن استخدامه لأجراء الاختبارات المعنوية مع تجاوز الإشكال إن σ مجهولة ويستحسن استعمال المقدرة بحكم إن المقدرة في تلك الحالة غير متحيزة

ولكن إذا وجد اختلاف التباين يصبح هذا التباين غير صحيح . ويكون التباين هو

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\sum x_i^2 \sigma_i^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

ويظهر الإشكال أن σ^2 مجهولة ويمكن من الصعب تقديرها. وكذلك هذا التباين ليس هو أدنى تباين فتفقد مقدرات م ص ع الكفاءة.

خصائص المقدرات تحت اختلاف التباين

اذا كان التباين مختلف، لدينا $E(u_i^2)=\sigma^2$
هذا يعني ان التباين يختلف من مشاهدة الى أخرى. ونريد ان نعلم ماذا كان هذا الاختلاف يؤثر على خصائص مقدرات المربعات الصغرى.

1-خاصية عدم التحيز:

مقدرات م ص ع للميل تساوي $\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$

حيث ان

$$Y = \alpha + \beta X_i + u_i$$

وكذلك
بطرح المعادلتين نتحصل على:

$$\overline{Y} = \alpha + \beta \overline{X}_i + \overline{u}_i$$

وباستخدام الانحرافات

$$(Y - \overline{Y}) = \beta(X_i - \overline{X}) + (u_i - \overline{u})$$

$$y_i = \beta x_i + u_i$$

بالتعويض في المعادلة أعلاة (مقدرة الميل β) بقيمة y

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i(\beta x_i + u)}{\sum x_i^2}$$

باستخراج المقدرة حيث انها ثابت وادخال اشارة الجمع

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}$$

أي ان $\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}$

وحيث ان u تعبر عن فروق

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i (u_i - \overline{u})}{\sum x_i^2}$$

بادخال $\sum x$ في القوس

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i - \sum x \overline{u}}{\sum x_i^2}$$

ادخال علامة التوقع

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i - \bar{u}\sum x}{\sum x_i^2}$$

وحيث أن وسط البواقي يساوي الصفر

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}$$

بادخال التوقع

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left[\frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}\right] =$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \left[\frac{\sum x E({}_i u_i)}{\sum x_i^2}\right] = \beta$$

وبنفس الطريقه يمكن اثبات ان مقدرة القاطع غير متحيزه

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X} = (\alpha + \beta\overline{X} + \bar{u}) - \hat{\beta}\overline{X}$$

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \beta\overline{X} + E(\bar{u}) - E(\hat{\beta})\overline{X} = \alpha$$

أي إن مقدرات م ص ع غير *متحيزة* أي تظل تحتفظ بخاصية عدم التحيز وفي المتوسط تساوي قيمة المعلمة الحقيقية.

<u>2-خاصية الكفاءة:</u>

فيما يختص بالكفاءة تستدعي بحث خاصية أدنى تباين أي هل مقدرات م ص ع هي الأفضل أم أنها تخسر خاصية الأفضلية لأدنى تباين.

التباين $V(\hat{\beta})$ يعرف على انه القيمة المتوقعة لـ $\hat{\beta}$ مطروحة من الوسط يعني انحرافات $\hat{\beta}$ التربيعية عن وسطها هو التوقع.

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left[\frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}\right] =$$

$$V(\hat{\beta}) = E\{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$$
$$V(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum x_i u_i}{\sum x_i^2}\right)^2$$
$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sum x^2{}_i E(u_i^2)}{\sum x_i^2}$$
$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sum x^2{}_i \sigma_i{}^2}{(\sum x_i^2)^2}$$

في ظل وجود اختلاف التباين يكون هذا تباين $\hat{\beta}$ هو ،

بمقارنته مع تباين $\hat{\beta}$ في حالة ثبات التباين نجد ان وجه الاختلاف إن σ متغير في حالة اختلاف التباين وكثابت في حالة ثبات التباين لو كانت ثابتة لاستطعنا كتابة التباين كما يلي

$$V(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

حيث إن التباين مختلف فأنه يتغير من مستوى لآخر في المتغير المفسر وبالتالي يكون التباين يأخذ قيم متغيرة وبالتالي لا نستطيع إن نحركه إلى يسار الجمع *. إن اختلاف التباين يجعل المقدرات ذات تباين اكبر* وهذا يعني أنها ليست افضل المقدرات أي إن اختلاف التباين يخسر على وجه التحديد خاصية آدني تباين يعني مقدرات مربعات الصغرى العادية سوف لن تعود تلك المقدرات التي تمتلك آدني تباين فبالتالي لن تصبح تلك المقدرات بأعلى دقه في القياس لان فيه علاقة عكسية بين التباين ودقة القياس إذا ارتفع التباين تقل دقة القياس فبالتالي إذا خسرنا آدني تباين سنخسر أعلي دقه معناها توجد ألان مقدرات أخرى خلاف مقدرات المربعات الصغرى العادية اكثر دقة في القياس ومعناها ينبغي استعمال تلك المقدرات الآن وليس مقدرات م ص ع لن الغرض في القياس الإحصائي دقة القياس ونظرا لوجود اختلاف في التباين لم تعد مقدرات م ص ع هي المقدرات التي تتميز بالدقة فهناك مقدرات أخرى تمتلك خاصية الدقة ويجب استعمال تلك المقدرات.

لكي نحصل على تلك المقدرات نأخذ النموذج الأساسي نجري علية تحويله لكي نحصل على نموذج جديد *مبرأ من اختلاف التباين* على وجه التحديد يكون التباين الخاص بالمتغير العشوائي في النموذج المصحح تباين ثابت وبعد ذلك نطبق م ص ع يعني نتوصل إلى نموذج مصحح يستوفي جميع الطرق اللازمة للحصول على م ص ع بصفاتها المعروفة من خطيه وعدم تحيز وكفاءه. أي نصحح النموذج الأصلي من مشكلة اختلاف التباين، وبعد ذلك نجري عملية التقدير

على النموذج المصحح ونتحصل على مقدرات نتوقع أنها الأفضل، لأنه في الواقع مقدرات جرى لتحصل عليها من نموذج لا يعاني من مشكلة اختلاف التباين

5.5 طريقة المعالجة العملية للتخلص من مشكلة اختلاف التباين :

نقسم طرفي النموذج على σ الخطأ المعياري.

$$Y_i = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i X_i + u_i$$

$$\frac{Yi}{\sigma_i} = \hat{\alpha}_i (\frac{1}{\sigma}) + \hat{\beta}_i (\frac{X_i}{\sigma}) + (\frac{u_i}{\sigma})_i$$

وتكتب على النحو التالي:

$$Y*_i = \hat{\alpha}_i W* + \hat{\beta}_i X* + u*_i$$

تشـير النجوم هذه إلى المتغيرات المصححة حيث أن

التابع/الخطأ المعياري للعنصر العشوائي= $Y* = \frac{Y_i}{\sigma_i}$

المفسر / الخطأ المعياري للعنصر العشوائي= $X* = \frac{X_i}{\sigma_i}$

عناصر المتغير العشوائي/الخطأ المقابلة لها= $u* = \frac{u_i}{\sigma_i}$

و $W*$ معكوس الخطأ المعياري = $W* = \frac{1}{\sigma_i}$ وسمي بمتغير لآنه يعتمد على σ وحيث إن σ متغيرة فان معكوسها متغير.

النموذج المصحح يستوفي جميع الفروض اللازمة للحصول على مقدرات مربعات صغرى عاديه تمتلك الخطية، عدم التحيز، الكفاءة، الاتساق ، الكفاءة التقاربيه.

إن وسـط العشوائيات = الصفر $E(u*)=0$

حيث إن

$$E(u*) = E(\frac{u_i}{\sigma_i}) = \frac{E(u_i)}{\sigma_i} = \frac{Zero}{\sigma_i} = 0$$

إن التغاير بين القيم الخاصة بالعناصر العشوائية = الصفر $COV(u*_i\ u*_j)$

$$COV(u_i u_j) = \frac{E(u_i, u_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{0}{\sigma_i \sigma_j} = 0$$

تباين العشوائي يساو ي قيمه ثابتة يمكن إثبات ذلك بملاحظة إن تباين العنصر العشوائي الجديد يساوي القيمة المتوقعة لـ $V(u^*) \ = E(u*_i)^2$

$$E(u^*)^2 = E(\frac{u_i}{\sigma_i})^2$$
$$E(u^*)^2 = E(\frac{u^2{}_i}{\sigma_i^2})$$

$$E(u^*)^2 = \frac{E(u^2)_i}{\sigma_i^2}$$

لكن $E(u^2) = \sigma^2$ نعوض عن القيمة في المعادلة أعلاه $V(u^*)^2 = \frac{\sigma^2{}_i}{\sigma_i^2} = 1$

تباين العنصر العشوائي المصحح الآن ثابت توصلنا إلى نموذج يكون التباين فيه ثابت آي تخلصنا من اختلاف التباين. آي يستوفي جميع الفروض بما فيها فرض ثبات التباين فيمكن الآن تطبيق م ص ع آي أن م ص ع تطبق على النموذج المصحح وليس النموذج الأصلي.

$$Y*_i = \hat{\alpha}_i W* + \hat{\beta}_i X* + u*_i$$

لأننا لو طبقنا على النموذج الأصلي نتحصل على مقدرات تفتقر إلى الكفاءة ولو طبقت على المصحح نتحصل على مقدرات تمتلك خاصية الكفاءة.

<u>مقدرات النموذج المصحح: </u>نستخدم طريقة المربعات الصغرى

وباستخدام النموذج المصحح

$$\sum \frac{Y}{\sigma^2} = \hat{\alpha}\sum \frac{1}{\sigma^2} + \hat{\beta}\sum \frac{X}{\sigma^2}$$
$$\sum \frac{XY}{\sigma^2} = \hat{\alpha}\sum \frac{X}{\sigma^2} + \hat{\beta}\sum \frac{X^2}{\sigma^2}$$

وباستخدام $w = \frac{1}{\sigma^2}$

$$\sum w_i Y = \hat{\alpha}\sum w_i + \hat{\beta}\sum w_i X_i$$
$$\sum w_i X_i Y_i = \hat{\alpha}\sum w_i X_i + \hat{\beta}\sum w_i X_i^2$$

وبحل المعادلة نصل على مقدرة β

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum w_i)(\sum w_i XY) - (\sum w_i X_i)(\sum w_i Y_i)}{(\sum w_i)(\sum w_i X_1^2) - (\sum w_i X_i^2)}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum w_i (X_i - \tilde{X})(Y_i - \tilde{Y})}{\sum W_i (X_i - \tilde{X})^2}$$

$$\tilde{\alpha} = \tilde{Y} - \tilde{\beta}\tilde{X}$$

هذه العلاقة تشبه المعادلات مربعات الصغرى العادية لكن ظهرت فيها w والتي تمثل الأوزان ، إذا كان التباين ثابت تكون w=1

$$\tilde{X} = \frac{(\sum w_i X_i)}{\sum w_i} \qquad \tilde{Y} = \frac{\sum w_i Y_i}{\sum w_i}$$

w تمثل الأوزان ويمكن أن نعرفها إذا كانت σ^2 معروفه ولكن في الغالب مجهولة وبالتالي لا نستطيع تطبيق هذه الطريقة ولذلك نستخدم مقدرات ألا مكانيه العظمى $\tilde{\tilde{\beta}}, \tilde{\tilde{\alpha}}$ ونستخدم هذه الرمز لهذه المقدرات وتكون هي افضل المقدرات وتمتلك خاصية آدني تباين بالأضافه إلا أنها تمتلك خواص الخطية وعدم التحيز.

إن هناك مشكله في اختلاف التباين مما يؤدي إلى إن بعض المشاهدات تباينها قليل والبعض الآخر كبير ، مما يجعلنا نتحول إلى نموذج آخر يحاول إن يقلل من آثار هذه المشكلة ويتم ذلك بإدخال أوزان إلى النموذج والتي تكون حصيلة قسمة على التباين σ^2 لأنه إذا كان التباين قليل كانت تباينها قليل، ويترتب على ذلك الآمر دقه المشاهدات لأنه سيكون فيه علاقة عكسية بين التباين والدقة فكلما كان التباين قليل كلما يعني الانتشار حول الوسط قليل معناه إن الدقة عالية وتتمركز القيم حول الوسط. إن الوزن المصحح المعطى للمشاهدة في عملية التقدير يعتمد على حجم التباين فالمشاهدة ذات التباين الكبير تقسم على قيمه كبيره والمشاهدة ذات التباين القليل تقسم على قيمه منخفضة. فالمشاهدة ذات التباين القليل تعطى وزن اكبر مما يعطي دقه الكبر بإدخال القيم ذات التباين القليل أوزان اكبر آي إن الوزن هو معكوس التباين فإذا كان التباين قليل يكون المعكوس كبير. إذا كان التباين كبير معناه إن المشاهدة الخاصة بالتغير التابع اقل دقه وبالتالي إذا أدخلناها في عملية القياس بصورتها الحالية يمكن إن تؤثر وتؤدي إلى قياسات غير دقيقه وبالتالي تقلل من تأثيرها بإعطائها أوزان اقل في مقدرات م ص ع وبإدخال الوزان في القياس وأعطينا

دور أكبر للمشاهدات الدقيقة ووزن أقل للمشاهدات الأقل دقه وتظهر هذه الأوزان مدخله لإعطاء المزيد للمشاهدات الجيده في عملية التقدير وتقليل اثر المشاهدات الغير جيده في عملية التقدير ونختار المقدرات التي تفلح في تصغير مجموع المربعات الموزون المرجح وهذه هي مقدرات ألا مكانيه العظمى.

. إذا كان التباين σ^2 معلوم:

نعوض بقيمة التباين في النموذج ونستخدم النموذج المصحح للتقدير

$$\frac{Yi}{\sigma_i} = \hat{\alpha}_i\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \hat{\beta}_i\left(\frac{X_i}{\sigma}\right) + \left(\frac{u_i}{\sigma}\right)_i$$

نفترض أن لدينا البيانات التأليه عن معدل التعويضات التي تقدمها الشركات للموظفين مأخوذة عن عشر أحجام من الشركات كل حجم يعتمد على عدد الموظفين ومحاولة لدراسة العلاقة بين معدل التعويضات ت وحجم المنشأة (انظري إلى البيانات في الصفحه الملحقه)

جدول ا لبيانات:

Y	X	σ	Y/σ	X/σ
3396	1	3.757	6635.5	0.0013
3787	2	51.58	8055.5	0.0023
0135	3	727.8	1395.5	150.00
3103	5	06.580	0978.5	050.00
6313	5	929.9	5855.5	550.00
1323	6	1080.6	753.92	550.00
3875	7	3.2512	28853.	650.00
3855	8	1307.7	70253.	0.0061
3585	9	51112.	3253.5	0.0081

باستخدام المربعات الصغرى الموزونة م ص م:

النتيجة:

$$(\hat{Y/\sigma}) = 3406.639(1/\sigma) + 154.153(X/\sigma)$$

$$(80.983) \qquad (9516.9)$$

$$t = (2.0665) \qquad (9.090)$$

$$R^2 = 0.9993$$

للمقارنه نستخدم م ص_ع $\hat{Y} = 3417.833 + 148.767X$

$$(81.136)$$

$$t = (52.125) \quad (10.318) \qquad R^2 = 0.9383$$

من هذه البيانات نلاحظ انه لا يوجد فرق كثير ولذلك استخدمي اختبار ثبات التباين وسنجد انه لا يوجد اختلاف في التباين.

σ^2 غير معروفه:

نقوم بمحاولة تقدير التباين الغير معروف، وهناك العديد من الطرق لتقدير ذلك التباين:

ب- افتراض ان التباين σ^2يرتبط بعلاقه لمربع المتغير المفسر X^2

يمكن التعبير عن اختلاف التباين بالدالة التالية

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 X_i^2$$

آي أن التباين يساوي

$$\sigma^2 = \frac{1}{X^2} E(u^2)$$

ولتصحيح النموذج حسب هذه ألداله بهذا يمكن تقسيم النموذج بقيمة X حيث

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{u_i}{X_i}$$

ويساوي

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \upsilon_i$$

حيث تمت υ المتغير العشوائي وتساوي e/X ألان يمكن إثبات افتراض التباين حيث

$$E(\upsilon^2) = E\left(\frac{u_i}{X_i}\right)^2 = \frac{1}{X^2{}_i} E(u^2) = \sigma^2$$

تباين النموذج المصحح

آي أن تباين النموذج المصحح ثابت ويمكن تطبيق م ص ع على النموذج المصحح.

ج- إن التباين يرتبط بعلاقة مع المتغير المفسر X:

يمكن التعبير عن اختلاف التباين بالدالة التالية

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2 X_i$$

آي أن التباين يساوي

$$\sigma^2 = \frac{1}{X} E(u^2)$$

$$\sigma = \frac{u}{X}$$

ولتصحيح النموذج حسب هذه الدالة بهذا يمكن تقسيم النموذج بقيمة X حيث

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \frac{u_i}{\sqrt{X_i}}$$

ويساوي

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \upsilon_i$$

حيث تمثل υ المتغير العشوائي وتساوي u لان يمكن إثبات افتراض ثبات التباين واستخدام م ص ع لتقدير β_0 , β_1.

تطبيقات

1-اجيبي بصح أوخطأ

أ- في وجود اختلاف التباين تكون مقدرات م ص ع متحيزه وأ قل كفاءه.

ب-عند وجود اختاف التباين فان، اختبارات t F غير صحيحه.

ج-في وجود اختلاف التباين فان طريقة م ص ع دائما يكون الخطأ المعياري للمقدرات متحيز.

د-اذا كان هناك اختلاف تباين فانه يكون هناك ارتباط بين التغيرات في المتغير العشوائي.

هـ-لايوجد اختبار لاختلاف التباين لايقوم بافتراضات عن علاقة التباين مع احد المتغيرات.

سؤال 2:

في الانحدار التالي للمعدل الاجور Wعلى عدد العمال N لعينه تتكون من 30 منشأه، الانحدار التالي تم التحصل عليه:

$$\hat{W} = 7.5 + 0.009N$$
$$t= \quad (16.10)$$
$$R^2=0.90$$

$$\hat{W}/N = 0.008 + 7.8(1/N)$$
$$t= \quad (35.51) \quad (8576.)$$
$$R^2=0.99$$

أ-اشرحي نتائج كل من المعادلتين.

ب-ماهو افتراض الباحث في هذه الدراسه هل كان مهتم باختلاف التباين.

ج-ماهي علاقة الميل والقاطع في كلا المعادلتين.

السؤال الثالث:

اذا كانت w ثابته قومي باثبات ان مقدرات النموذج المصحح ومقدرات م ص ع وتباينها متساويه.

السؤال 5:

من الجدول الملحق عن نسبة المبيعا ت /كمية النقود في مصانع الولايات المتحده الامريكيه مقسمه حسب حجم المنشأه (حجم الاصول) للسنوات 1971 الى 1973 وهي بيانات ربع سنويه.

أ-لكل حجم منشأه احسبي المتوسط والانحراف المعياري لقيمه النسبه بين المبيعا ت /كمية النقود.

ب-ارسمي شكل الانتشار للمتوسط و الانحراف المعياري التي قمت بحسابها في أ.

ج-قومي بتقدير العلاقه بين المتوسط والانحراف المعياري.

د-اذا كان هناك علاقه بين المتوسط والانحراف المعياري كيف تقومين بتحويل البيانات بحيث يتم التخلص من اختلاف التباين.

السؤال الخامس:

البيانات في الجدول المرافق عن استهلاك النفط في 20 دولة

أ- هل يوجد علاقه بين استهلاك النفط وعدد السكان اجيبي باستخدام الانحدار البسيط.

ب- استخدمي اختبار بارك لاختبار اختلاف التباين.

ج-قومي بتصحيح النموذج باعتبار ان هناك علاقة بين تباين النموذج و قيمة المتغير المفسر

$$E(u^2) = \sigma^2 X$$

د-قومي باستخدام الخطأ المعياري المصحح لوايت في انحدار بين استهلاك الطاقه وعدد السكان واختبار جولد فيلد-كوانت وماهو الاستنتاج الذي تبنينه من النتيجه؟

الجدول:

الدوله	استهلاك الطاقه	عدد السكان
1	270	1136
2	122	948
3	58	520
5	821	5750
5	98	953
6	450	3126
7	1819	17567
8	1229	7427
9	1200	11879
10	1205	10772
11	650	5482
12	1198	11466
13	760	9116
51	460	4745
51	503	4133
16	371	2906
17	571	4942
18	136	672
19	109	694
20	203	1589

علاقة التعويضات المالية في المصانع مع انتاجية العامل

الصناعه	4-1	9-5	19-10	49-20	99-50	-100 249	-250 499	-500 999	-1000 2499
تغذيه	2.994	3.295	3565	3907	4189	4486	4676	4968	5342
سجائر	1721	2057	3336	320	2980	2848	3072	2969	3822
اقمشة	3600	3657	3674	3437	3340	3334	3225	3163	3168
ملابس	3494	3787	3533	3215	3030	2834	2750	2967	3453
ورق	3498	3847	3913	4135	4445	4885	5132	5342	5326
بويات	3611	4206	4695	5083	5301	5269	5182	5395	5552
مواد كيميائية	3875	4660	4930	5005	5114	5248	5630	5870	5876
منتجات بترول	4616	5181	5317	5337	5421	5710	6316	6455	6347
منتجات بلاستيكيه	3538	3984	4014	4287	4221	4539	4721	4905	5481
جلود	3016	3196	3149	3317	3414	3254	3177	3346	4067
معدل التعويضات	**3396**	**3787**	**4013**	**4014**	**4146**	**4241**	**4387**	**4538**	**4843**
الانحراف المعياري	7437.	851.4	727.8	5805.06	929.9	1080.6	1243.2	1307.7	1112.5
الانتاجية	**9355**	**8584**	**7.962**	**8275**	**8.389**	**9.418**	**9.795**	**10.281**	**11.750**