لم تقتصر العلوم في حضارة وادي الرافدين على الصناعات او الحرف فقط ، فالبابليين على الأخص حاولوا اكتشاف أشياء أضافوها إلى معارفهم ، والدالة على القيمة العلمية للتراث الذي خلفه البابليون هي الرياضيات ومن فروعها الهندسة.
لقد عرفوا الهندسة لحاجتهم في مسح الأراضي وتشيد القصور والمعابد وإقامة السدود وخزانات المياه.

انجازات البابليون في مجال المعرفة (الهندسة) لخواص بعض الاشكال ومساحتها وعلاقة اجزائها بعضها ببعض ، فقد استطاعوا ان يحسبوا سطوح اشكال هندسية معينة ، كحجم متوازي المستطيلات القائم ، حجم الاسطوانة القائمة ، كما عرفوا الدائرة وترها وقوسها ثم مساحتها.
مبرهنة فيثاغورس معروفة لدى البابليين " لوح مستطيل عرضه ١٠ م، وطوله ٤٠ م فما هو قطره"

اما في بلاد وادي النيل فقد كانت الهندسة العملية في مستوى جيد وذلك بسبب حاجتهم لتحديد الاراضي الزراعية بعد فيضان النيل كل عام . لقد عرف المصريون ايجاد مساحات بعض الاشكال الهندسية كالمثلث ، الدائرة، المستطيل وكذلك وجدوا قواعد لايجاد حجوم بعض الاشكال كالمكعب ، متوازي المستطيلات ، الاسطوانة والهرم الناقص.
لقد سبق المصريون اليونانيين في تطبيق نظرية فيثاغورس ، حيث عرفوا ان المثلث الذي تكون نسبة اضلاعه الى بعضها الاخر ٣,٤,٥ هو مثلث قائم الزاوية ، كما استخدموا الحجارة المكعبة الشكل في بناء الاهرام ، حسبوا النسبة الثابتة $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ أي مايقارب ٣,١٦٠٤ وعرفوا نصف الكرة ....الخ.

الهندسة عند الاغريق:كانت مقتبسة من البابليين والمصريين الا انهم درسوها علميا واضافوا اليها اضافات هامة ، لذلك نسب علم الهندسة الى اليونان وحدها.
من ابرز علماء الهندسة في اليونان هو " اقليدس" في حوالي سنة ٣٠٠ ق.م حيث وضع اول كتاب في الرياضيات مبني على نظم البديهيات هو كتاب" الاصول ". (خلف عصر افلاطون ، وهو اول استاذ للرياضيات في جامعة الاسكندرية).
برزت في اليونان عدة مدارس اهتمت بالهندسة على الاخص ومنها

- المدرسة اليونانية من ابرز تلامذتها "طاليس" ، اكتشف بعض الحقائق اهمها (قطر الدائرة ينصفها ، الزاويتان المتقابلتان بالراس متساويتان.......الخ.
- المدرسة الفيثاغورية ("فيثاغورس " الذي كان احد طلبة طاليس) درس الفيثاغوريون الصفات الهندسية للاعداد واطلقوا على بعضها صفة اعداد مثلثة وعلى الاخر صفة اعداد مربعة واهم اكتشاف هو البرهان الهندسي لنظرية فيثاغورس. دامت المدرسة الفيثاغورية من بعد فيثاغورس مائتي سنة وكان "ابيقراط" ٤٣٠ ق.م اول من حاول بناء نظام منطقي للهندسة وصياغتها بسلسلة من النظريات المبنية على عدد من البديهيات والتعاريف.
- المدرسة الاثنية من اشهر علماؤها " افلاطون" ٣٩٩ ق.م الذي كان متاثرا بالفيثاغوريين وهو الذي قال " بان الرياضيات افضل تمرين للعقل". تناول الرياضيات من جانبها النظري المجرد لا من جانبها العملي.

الفصل الاول

<u>مكونات النظام البديهي (تعاريف ، مجموعة بديهيات ومبرهنات)</u>

التعاريف : أي تعريف لاي مصطلح في الرياضيات يجب ان يعبر عنه ببساطة ، ان يكون غير دوري ويصف بطريقة وحيدة الكلمة المراد تعريفها .
فالبساطة : تعني ان نعبر عن الكلمة المراد تعريفها بكلمات ابسط منها ، أي بكلمات معروفة.
الدورية : عند تعريف كلمة ما فاننا سنمر بسلسلة من التعاريف التي قد تنتهي بنفس الكلمة .
الوصف الوحيد : ان التعريف الدقيق لكلمة ما يجب ان يصف هذه الكلمة بطريقة بحيث لاينطبق هذا الوصف على كلمة اخرى .

لحل هذه المشكلة : نختار بعض الكلمات بدون تعريف لتكون كلمات اولية او كلمات غير معرفة وبدلالتها تعرف بقية الكلمات او المصطلحات في النظام .

الكلمات الاولية

الكلمات المنطقية عدد غير منته من الكلمات المنطقية.

مثلا

كل ، لاي ، بعض ، يوجد ، في الاقل ، في الاكثر، وهكذا .

الكلمات التقنية: تختلف من موضوع الى اخر.

مثلا

ففي الهندسة بصورة خاصة : النقطة ، المستقيم ، التطابق. تعتبر هذه الكلمات اولية في النظام المعطى وفي انظمة اخرى في الهندسة نختار كلمات ا ولية اخرى.

البديهيات Axioms

البديهية : "هي بعض العبارات البسيطة التي تتعلق بالكلمات الاولية كاساس ومنها نستنتج العبارات الاخرى في النظام .هذه العبارات الاساسية التي نتقبلها بدون برهان تدعى بديهيات والتي هي حجر الاساس للبناء" .

- لقد عرف هلبرت البديهية في نظامه البدهي للهندسة الاقليدية مايلي: " اذا اخذنا بعض الكلمات لتكون اولية ، فان البديهيات هي مجرد فرضيات حول تلك الكلمات الاولية ". الكلمات الاولية مجرد متغيرات ⟵ البديهيات جمل مفتوحة وبالتالي لايمكن ان يقال انها اما صائبة او خاطئة ، وعليه فان البديهية لاتحتاج الى برهان.

المبرهنة Theorem

هي النتيجة التي نحصل عليها من بديهيات النظام او من عبارات في هذا النظام .
علم الهندسة نظام بديهي لاننا نستخدم مجموعة من تعاريف ، بديهيات ، ومبرهنات.
اقرب وافضل مثال عن النظام البدهي هو الهندسة الاقليدية.

امثلة عن انظمة بدهية منتهية (تحتوي عدد منته من العناصر)
تعتمد على النقطة والمستقيم ككلمات اولية.

اولا: المستوى الاسقاطي : Projective Plane

يتكون من مجموعة نرمز لهذه المجموعة بالرمز π وتتضمن كلمات اولية تقنية تدعى نقاط ،يرمز لها بحروف كبيرة A,B,C ومجموعات جزئية من π تدعى مستقيمات ، يرمز لها بحروف صغيرة .... l,m,n, .

البديهيات :

- Ax1 : أي نقطتين مختلفتين في π يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2 : كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
- Ax3 : توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.
- Ax4 : أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.

مبرهنة رقم (١):

أي مستقيمين مختلفين في المستوى الاسقاطي يشتركان في نقطة واحدة فقط.
البرهان:
ليكن l,m مستقيمين مختلفين في π .
l,m مختلفين يعني ان $l \neq m$.
من Ax4 توجد نقطة A بحيث ان A تنتمي الى l و Aتنتمي الى m.
نفرض انه توجد نقطة اخرى B تختلف عن A بحيث ان B تنتمي الى l و B تنتمي الى m .
فانه من Ax1 ، l=m. وهذا تناقض مع الفرض $(l \neq m)$.
وبهذا فان l,m يشتركان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة رقم (٢):

أي نقطة في المستوى الاسقاطي هي عنصر لثلاثة خطوط في الاقل.
البرها ن:
لتكن P أي نقطة في π
من Ax3 ، يوجد مستقيم l ، بحيث ان$P \notin l$.
من Ax2 ، توجد ثلاث نقاط في الاقل على المستقيم l ولتكن A1,A2,A3 .
من Ax1 ، توجد الخطوط PA1,PA2,PA3 التي تمر من P وتكون مختلفة.

مستويات اسقاطية منتهية:

المستوى الاسقاطي المنته :هو مجموعة منتهية تحقق البديهيات اعلاه.

مبرهنة رقم (٣):

اذا وجدت بالضبط n من النقاط على مستقيم لمستوي اسقاطي منته . فان المستوي يحتوي بالضبط على n^2-n+1 من النقاط.

البرهان:

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط، ولتكن P1,P2,.......Pn .

من Ax3 ، توجد نقطة P لاتقع على l .

ومن Ax1 ، توجد n من الخطوط المختلفة PP1,PP2,PP3,.......PPn . ومن Ax2 ، توجد نقطة ثالثة على كل خط من هذه الخطوط، ولتكن Q1,Q2,.....,Qn على التوالي.

ناخذ النقطة Q1 ونصلها بالنقاط P1,P2,.......Pn .

فنحصل على n من الخطوط Q1P1,Q1P2,.....,Q1Pn هذه الخطوط تقطع PP2 في n من النقاط المختلفة.

لذلك PP2 يحتوي على n-1 من النقاط عدا P . ان هذا يصح لكل من المستقيمات PP1,PP2,........PPn . وبهذا ، n من الخطوط ، وكل خط منها يحتوي على n-1 من النقاط، ومع النقطة P ، يحتوي المستوي على n(n-1)+1= n^2-n+1 من النقاط في الاقل.

لكي نبرهن ان المستوي يحتوي على n^2-n+1 من النقاط على الاكثر ، نفرض وجود نقطة اخرى Q ، لاتقع على أي خط من تلك الخطوط. الخط QP يختلف عن الخطوط المذكورة. من Th 1 QP يقطع l في نقطة Pn+1 التي تختلف عن النقاط P1,P2,.....Pn. وبهذا يحتوي l على n+1 من النقاط وهذا يخالف الفرض.

نتيجة: اذا كان في المستوي الاسقاطي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط ، فان أي مستقيم اخر يحتوي بالضبط على n من النقاط.

ثانيا: المستوى التالفي : Affine Plane

يتضمن المستوى التالفي من مجموعة α من كلمات اولية تقنية تدعى نقاط ، ومجموعات جزئية من α تدعى مستقيمات ،والتي هي ايضا تقنية.

ملاحظة: سنرمز للنقاط والمستقيمات في α نفس الرموز المستخدمة في النظام الاسقاطي.

البديهيات

- Ax1: أي نقطتين مختلفتين A,B في α يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2 :كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
- Ax3 :يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث ان $l \not\ni A$.
- Ax4 :اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $l \not\ni A$ ،فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $l \cap m = \phi$.

تعريف رقم (١):

يقال لمستقيمين مختلفين انهما متوازيان ، اذا كان $l \cap m = \phi$.

اذن يمكن ان نعيد نص بديهية رقم ٤ بالشكل التالي:"اذا كان l مستقيما وA نقطة بحيث ان $l \not\ni A$، فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يمر منA ويوازي l ".

مبرهنة رقم (٤):

أي مستقيمين مختلفين في مستوى تالفي يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر .

البرهان :

نفرض ان العبارة خطا. فيوجد مستقيمان مختلفان l,m يشتركان في نقطتين في الاقل ، ولتكن Q&P . ولكن هذا يناقض Ax1 ، حيث ان Q&P تقعان على المستقيمين l,m ، وان Ax1 تنص على انه لكل نقطتين معلومتين، يوجد مستقيم واحد فقط يحتويهما .

لذلك، فان فرضيتنا تؤدي الى تناقض . وبهذا فان أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة على الاكثر. أي ان ، المستقيمين اما يكونا متوازيين او يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة رقم (٥):

اذا قطع مستقيم احد مستقيمين متوازيين ،فانه يجب ان يقطع الاخر.

البرهان:

ليكن l,k مستقيمين متوازيين، وان m مستقيم اخر يقطع k في نقطة P. يجب ان نبرهن ان m يقطع l في نقطة ما. نفرض ان العبارة خطأ، أي ان m يوازي l، فانه من Pسيكون هنالك المستقيمان k,m يوازيان l ، وهذا يخالفAx4. لذلك فان الفرض يجب ان يكون خاطئا. وهكذا ، اذا قطع خط احد مستقيمين متوازيين، فانه يجب ان يقطع الاخر.

مبرهنة رقم (٦):

المستقيمان الموازيان للمستقيم نفسه متوازيان.

البرهان:

ليكن kوl مستقيمين متوازيين ، و m,lمستقمين متوازيين . يجب ان نبرهن ان kوm متوازيان.

نفرض ان العبارة خطأ. فاذا كان k لايوازي m ، فانه يقطع m. ومن Th 5، فان k يجب ان يقطع l، وهذا يناقض الفرض بان k يوازي l .وهذا يؤدي الى تناقض مع فرضيتنا.

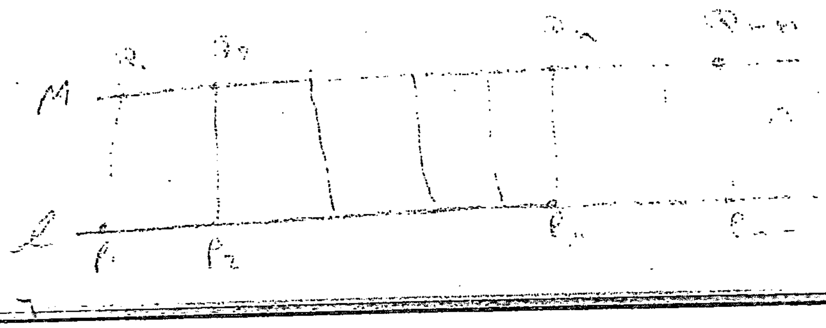
مستويات تالفية منتهية:

هو مجموعة منتهية تحقق بديهيات المستوى التالفي.

مبرهنة رقم (٧):

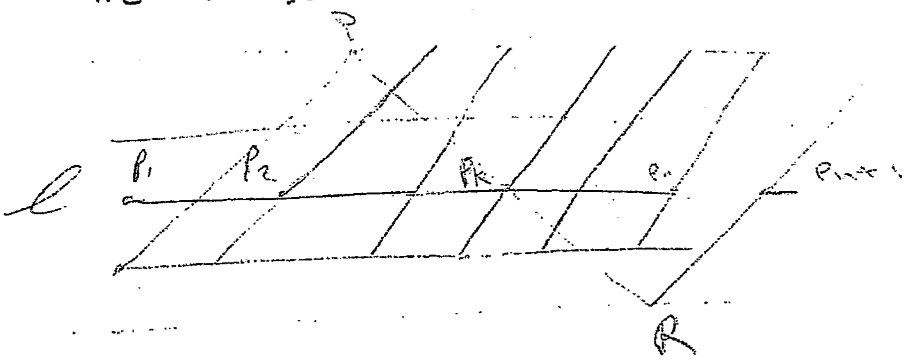
اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ،فان أي مستقيم يوازي l يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان:



نفرض ان l مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط P1,P2,.....Pn . ليكن m أي مستقيم يوازي l . يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. من Ax2 ، توجد نقطة Q1 على m . ومن Ax1 ، يوجد المستقيم P1Q1 . من Ax4 ، توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى P1Q1 من النقاط P2,....Pn ومن 6 Th ، هذه المستقيمات تكون متوازية ومن Th 4,5 ، تقطع هذه المستقيمات المستقيم m في n-1 من النقاط المختلفة ، ولتكن Q2,......Qn والتي تختلف عن Q1 (من تعريف التوازي). من هذا نستنتج على انه توجدعلى الاقل n من النقاط على m .

لكي نبرهن على وجود على الإكثر n من النقاط على m ،نفرض وجود نقطة اخرى ، Qn+1 على m . من Ax4، يوجد مستقيم يمر من Qn+1 ويوازي P1Q1.من Th 4,5 ، هذا المستقيم يقطع l في نقطة غير النقاط P1,......Pn ، وهذا يخالف الفرض بان l يحتوي بالضبط على n من النقاط.



مبرهنة رقم (٨):

اذا كان أي مستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط ،فانه توجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l .

البرهان:

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط ولتكن، P1,P2,....Pn. ولتكن P نقطة لاتقع على l (Ax3) .

من Ax1 ، يوجد المستقيمان ppk,pp1 حيث(Pk أي من النقاط P2, Pn).

من Ax4 ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى pp1 والتي تمر من النقاط P2,P3,.....Pn (احدهما سيمر بالنقطة Pk).من Th 4,5 المستقيم ppk الذي يقطع pp1 والمستقيم الموازي له من pk، يجب ان يقطع كل من الخطوط الاخرى الموازية الى pp1 في نقطة واحدة فقط. لذلك، عدد نقاط التقاطع هذه عبر ppk تكون بالضبط n من النقاط.

من Ax4 و Th 4 ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l من n من النقاط على الخط ppk عدا Pk (حيث ان Pk تقع على l).

نفرض على انه يوجد موازي اخر الى l ، ومن Th4,5 هذا المستقيم سيقطع ppk في النقطةR التي تختلف عن نقاط تقاطعه مع pp1 والمستقيمات الموازية له.ومن Ax4 ، يوجد موازي من

مبرهنة رقم (٩):

اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، فان أي مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان:

ليكن l مستقيما يحتوي بالضبط على n من النقاط . وليكن m أي مستقيم اخر . يجب ان نبرهن ان m يحتوي بالضبط على n من النقاط. اما m يقطع l، اولايقطعه.

اذا لم يقطع l ،فمن Th 7 ، يحتوي m بالضبط على n من النقاط.

نفرض ان m يقطع l في نقطة، ولتكن P .

مبن Th 8 ، يوجد بالضبط n-1 من المستقيمات الموازية الى l .

من Th 4,5 ، m يقطع l والمستقيمات الموازية له في n من النقاط وبضمنها P .

نفرض وجود نقطة اخرى على m.

منAx4 ، يوجد موازي اخر الى l من هذه النقطة، ولكن هذا يخالف Th 8 ، لذلك فان m يحتوي بالضبط على n من النقاط.

نظام فانو

The System of Fano

: يتضمن بديهيات المستوي الاسقاطي + البديهية التالية " اذا كان l مستقيما ، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l ".
وبالتالي يتضمن نظام فانو البديهيات الاتية:
البديهيات :

- Ax1: أي نقطتين مختلفتين يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2: كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.
- Ax3: توجد في الاقل نقطة واحدة A ويوجد في الاقل خط واحد l بحيث ان $A \notin l$.
- Ax4: أي مستقيمين يشتركان في نقطة واحدة في الاقل.
- Ax5: اذا كان l مستقيما ، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l.

ملاحظة : نظام فانو منته ، حيث يحتوي المستقيم فيه على ثلاث نقاط فقط (من Ax2+Ax5)، والنقاط والخطوط فيه منته ايضا.

مبرهنة رقم (١٠):

يحتوي نظام فانو على سبع نقاط فقط.

البرهان:
من Ax3 : توجد في الأقل نقطة A ، ومستقيم واحد l بحيث ان $A \notin l$.
من (Ax2+Ax5) : l يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط ، ولتكن 1,2,3 .
والنقطة A=7 .
من Ax1 : يوجد ثلاث مستقيمات مختلفة (7,2) ، (7,1)، (7,3).
من (Ax2+Ax5) : توجد نقطة ثالثة على كل مستقيم ، أي
(7,2,6)، (7,1,4)، (5,3,7) ، 4,5,6 (نقاط مختلفة).
اذن توجد على الاقل سبع نقاط.
لاثبات على الاكثر: نفرض وجود نقطة مختلفة اخرى ولتكن 8 .
حسب Ax1 : يوجد الخط (7,8) .
ناخذ المستقيمين (7,8) و(4,6,3) ، فانهما يجب ان يتقاطعان في نقطة واحدة فقط حسب Th1
نلاحظ ان المستقيم (7,8) لايمكنه ان يقطع المستقيم (4,6,3) في النقطة 4 لانه سيشترك مع المستقيم (1,7,4) في نقطتين هما 7,4 .
كذلك المستقيم (7,8) لايمكنه ان يقطع المستقيم (4,6,3) في النقطتين 6 و3 لانه سيشترك مع المستقيم (2,6,7) في النقطتين 7,6 والمستقيم (7,5,3) في النقطتين 7,3 .

وهذا تناقض مع Th1 .
اذن لايوجد اكثر من 7 نقاط.
اذن عدد النقاط بالضبط 7 .

مبرهنة رقم (١١):

أي نقطة يمر بها بالضبط ثلاثة مستقيمات.

البرهان:
لناخذ النقطة 5 مثلا يمر بها المستقيمات (1,6,5) ،(7,5,3) و(6,5,4)(السبب في كون هذه المستقيمات مختلفة)؟ .
والان نفرض مستقيم اخر (رابع) يمر بالنقطة 5 .
حسب(Ax2+Ax5): يحتوي المستقيم الرابع على ثلاث نقاط بالضبط احداهما النقطة 5 التي تختلف عن النقاط {1,2,3,4,6,7 }.
ولو كانت النقطتين الاخرتين هما 1,4 فالمستقيم الرابع (5,1,4) سيقطع المستقيم (1,4,7) في نقطتين مختلفتين ، وهكذا بالنسبة لبقية النقاط .
اذن لايوجد مستقيم رابع.
اذن عدد المستقيمات المارة بالنقطة 5 هو ثلاث مستقيمات فقط.
وهكذا بالنسبة لبقية النقاط.

مبرهنة رقم (١٢):

يحتوي نظام فانو على سبعة مستقيمات فقط.
البرهان: ؟

نظام يونك

The System of Young

: يتضمن بديهيات المستوى التالفي + البديهية الاتية " اذا كان l مستقيما ، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l ".

البديهيات

- Ax1 : أي نقطتين مختلفتين A,B في α يحتويهما مستقيم واحد فقط.
- Ax2 :كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل.

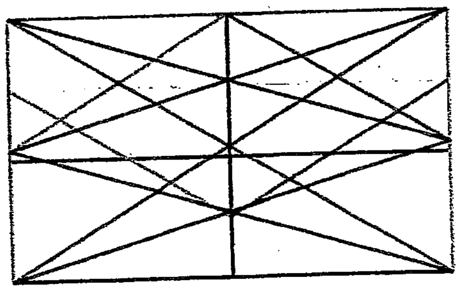
- Ax3 :يوجد في الاقل نقطة واحدة A ومستقيم واحد l بحيث ان $l \not\ni A$.
- Ax4: اذا كان l مستقيما و A نقطة بحيث ان $l \not\ni A$ ،فانه يوجد مستقيم واحد فقط m يحتوي A بحيث ان $l \cap m = \phi$.
- Ax5 :اذا كان l مستقيما ، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l .

ملاحظة: نظام يونك هندسة منتهية والسبب في ذلك " كل مستقيم يحتوي على ثلاث نقاط في الاقل ،اذا كان l مستقيما ، فانه توجد على الاكثر ثلاث نقاط تقع على l " هذين البديهيتين تجعل عدد النقاط والمستقيمات منتهيا ، حيث الخط فيه يحتوي على ثلاث نقاط فقط.

مبرهنة رقم (١٣) :

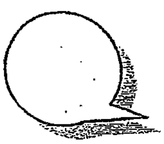
يحتوي النظام على تسع نقاط فقط.

البرهان:
من Ax3 نستنتج : يوجد على الاقل مستقيم واحد l .
حسب (Ax2+Ax5): l يحتوي بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة بالضبط.
نستنتج من (Th6+Th8) : يوجد مستقيمان (k ,m) موازيان الى l، وكذلك متوازيان.
حسب (Ax2+Ax5):كل من المستقيمان (k ,m) يحتويان بالضبط على ثلاث نقاط مختلفة.
اذن يوجد على الاقل تسع نقاط في النظام .
لاثبات بالضبط نفرض وجود نقطة اخرى لاتقع على أي من هذه المستقيمات المختلفة،ولتكن A(من الواضح ان النقطة A ستكون خارج المستقيم (l,m,k
وحسب Ax4: يوجد مستقيم اخر يمر من A ويوازي l ، ولكن هذا تناقض مع Th8 (لانه اصبح لدينا n وليس n-1 من المستقيمات الموازية l).
اذن يوجد تسع نقاط بالضبط في نظام يونك.



مبرهنة رقم (١٤) :

يحتوي النظام على اثني عشر مستقيم فقط.
البرهان:؟



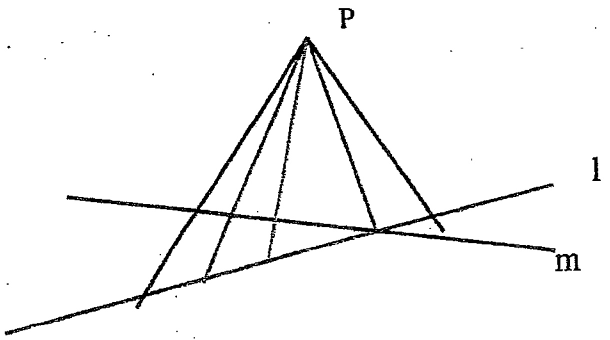
مبرهنة رقم (١٥):

اية نقطة يمر بها اربعة مستقيمات فقط.
البرهان:؟

تمارين :

س:
في المستوي الاسقاطي إذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن الاتي:
أي مستقيم في النظام يحتوي بالضبط على n من النقاط.

البرهان: نفرض ان $l \in \pi$.
من معطيات السؤال يحتوي l على n من النقاط بالضبط ولتكن P1,P2,…..,Pn .
كذلك يوجد مستقيم أخر m .
المطلوب اثباته: m يحتوي بالضبط على n من النقاط؟
من Ax3 : توجد نقطة $P \notin l$.
من Th1 : المستقيم m يقطع l في احدى نقاطه ولتكن Pi,i=1,2,3,……n .
من Ax1 : توجد n من المستقيمات المختلفة PP1,PP2,…..,PPn .
نلاحظ ان جميع هذه المستقيمات تقطع المستقيم m في n من النقاط المختلفة ولتكن Q1,Q2,….Pi,Qn .
اذن حصلنا على n من النقاط على الاقل للمستقيم m .
لاثبات على الاكثر n من النقاط.
نفرض وجود نقطة اخرى على المستقيم m ولتكن Qn+1 التي تختلف عن نقاطه .
من Ax1 : يوجد المستقيم PQ_{n+1} الذي يختلف عن بقية المستقيمات PP1,PP2,…..,PPn .
من Th1 : المستقيم PQ_{n+1} يقطع المستقيم l في نقطة اخرى مختلفة عن نقاطه ولتكن Pn+1.
ولكن هذا تناقض مع الفرض ، حيث يحتوي l على n من النقاط بالضبط.
اذن m يحتوي بالضبط على n من النقاط.



س:
في المستوي الاسقاطي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن :
أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات .

البرهان:
من Ax 3 : يوجد $P \notin l$.
من المعطيات المستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة وهي $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.
من Ax1: يوجد n من المستقيمات المختلفة $PP_1, PP_2, \ldots\ldots, PP_n$ ، (لان لكل مستقيم له نقطة تميزه).
اذن ، يوجد على الاقل n من المستقيمات المختلفة التي تمر بالنقطة P.
والان نفرض وجود مستقيم اخر m يمر بالنقطة P ويختلف عن المستقيمات $PP_1, PP_2, \ldots\ldots, PP_n$.
المستقيم m يقطع المستقيم l في النقطة P_{n+1} .(من مبرهنة ١ تختلف النقطة P_{n+1} عن النقاط $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$).
وهذا مستحيل لان المستقيم l يحتوي على n من النقاط بالضبط .
اذن عدد المستقيمات المارة بالنقطة P بالضبط n من المستقيمات.

س:
في المستوي الاسقاطي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن :
يوجد بالضبط $n^2 - n + 1$ من المستقيمات في النظام.

البرهان:
من المعطيات المستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.
ناخذ النقطة الاولى P_1 حسب (في المستوي الاسقاطي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط
أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات).
يمر بالنقطة P_1 ، n من المستقيمات المختلفة مع المستقيم الاصلي l .
اذن عدد المستقيمات المارة ب P_1 (ماعدا المستقيم l) n-1 من المستقيمات.
وهكذا بالنسبة لبقية النقاط $P_2, P_3, \ldots\ldots, P_n$.
لاحظ ان المستقيمات المارة بالنقطة P_1 لاتتكرر بالنقطة P_2 ولا بالنقاط $P_3, P_4, \ldots\ldots, P_n$)
والسبب بذلك اذا تكررت لاصبح لدينا مستقيم يقطع المستقيم l في نقطتين مختلفتين وهذا يخالف مبرهنة ١).
اذن عدد النقاط n وكل نقطة يمر بها n-1 من المستقيمات عدا المستقيم l ومع المستقيم l نحصل على $n(n-1)+1 = n^2 - n + 1$ من المستقيمات.
والان نفرض وجود مستقيم جديد في النظام وحسب مبرهنة ١ فانه سوف يقطع المستقيم l في احدى نقاطه وليكن P_1 وهذا يناقض (في المستوي الاسقاطي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ،أي نقطة في النظام يمر بها بالضبط n من المستقيمات).
اذن عدد المستقيمات الكلي في النظام $n^2 - n + 1$ بالضبط.

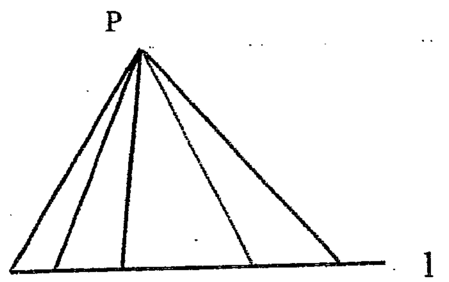
تمارين:

س

في المستوى التالفي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، برهن الاتي:
أي نقطة يمر بها بالضبط $n+1$ من المستقيمات.

البرهان:

لتكن P نقطة معلومة.
حسب Ax3 : توجد نقطة معلومة P ومستقيم l بحيث ان $P \notin l$.
من الفرض يوجد مستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط.،ولتكن P1,P2,…,Pn .
حسب Ax1 : توجد n من المستقيمات المختلفة ولتكن pp1,pp2,…,ppn .
من Ax4 : يوجد مستقيم واحد فقط m يمر من النقطة P ويوازي l .
اذن يوجد n+1 من المستقيمات المارة من P على الاقل.
لاثبات على الاكثر: نفرض وجود مستقيم اخر يمر من P وليكن k،
توجد حالتان : التوازي (أي k يوازي l) يؤدي الى تناقض مع Ax4 لان m يوازي l.
التقاطع (أي ان k يقطع l) في نقطة مختلفة عن نقاطه ولتكن Pn+1 ، وهذا تناقض مع الفرض.
اذن يوجد بالضبط n+1 من المستقيمات المارة من P .



س:
في المستوي التالفي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن:
يوجد بالضبط n^2 من النقاط في النظام.

البرهان:
ليكن l مستقيم معلوم ويحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة وهي $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.
حسب مبرهنة ٨ : يوجد n-1 من المستقيمات الموازية للمستقيم l .
حسب مبرهنة ٧ : كل مستقيم يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة .
ان أي مستقيم يقطع المستقيم l في نقطة معينة ، فانه سوف يقطع كل المستقيمات الموازية للمستقيم l والتي عددها n-1 (حسب مبرهنة ٥) .

وبالتالي فان نقاط المستقيم القاطع (k) ستحسب ضمن نقاط المستقيم l والمستقيمات الموازية له .

اذن عدد النقاط الكلية يساوي

$$n+n+n+.....+n=$$
$$n(1+1+1+.....+1)=$$
$$n(n)=n^2$$

س:

في المستوي التالفي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط ، برهن:
يوجد بالضبط n(n+1) من المستقيمات في النظام.

<u>البرهان:</u>

حسب Ax3 : يوجد مستقيم l.
من المعطيات المستقيم l يحتوي بالضبط على n من النقاط المختلفة $P_1, P_2, ..., P_n$.
ناخذ النقطة P_1 ، حسب (في المستوى التالفي ، اذا وجد مستقيم واحد يحتوي بالضبط على n من النقاط، أي نقطة يمر بها بالضبط n+1 من المستقيمات).
حيث لايوجد تكرار في هذه المستقيمات.
اذن عدد المستقيمات القاطعة للمستقيم l يساوي $n(n)$.
وعدد المستقيمات القاطعة (مع المستقيم l) يساوي $n(n)+1$.
حسب مبرهنة 8 : عدد المستقيمات الموازية للمستقيم l يكون بالضبط n-1 .

إذن عدد المستقيمات الكلي

$$n(n)+1+(n-1)=$$
$$n^2+n=$$
$$n(n+1)$$