المصفوفات (Matrices)

تعرف المصفوفة A من الصنف $(m \times n)$ بأنها ترتيبة مستطيلة تحوي mn من الأعداد الحقيقية او العقدية مرتبة على شكل صفوف أفقية عددها m وأعمدة رأسية عددها n

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -----a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & -----a_{2n} \\ --- & ----- & ------- \\ --- & ----- & ------- \\ a_{m1} & a_{m2} & -----a_{mn} \end{bmatrix}$$

أن الصف رقم $\boldsymbol{i}$ للمصفوفة A هو

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \dots \dots \dots \quad a_{in}]$$

حيث $(1 \le i \le m)$

والعمود رقم $\boldsymbol{j}$ للمصفوفة A هو

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$(1 \le j \le n)$

أذا كان m=n فيقال بأن A مصفوفة مربعة رتبتها n وتشكل الأعداد $(a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots \dots \dots \dots . a_{mn})$ القطر الرئيسي الى A ونشير الى العدد (a_{ij}) للمصفوفة A وغالباً ما يكتب

$$A = [a_{ij}]$$

مثال:-

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E = [3], \qquad F = [-1 \quad 0 \quad 2]$$

فأن (A) مصفوفة من صنف (2×3) فيها $(a_{12} = 2)$، $(a_{13} = 3)$، $(a_{22} = 0)$ $(a_{23} = 1)$ و (B) هي مصفوفة من الصنف (2×2) فيها $(b_{11} = 1)$، $(b_{12} = 4)$، $(b_{21} = 2)$ $(b_{22} = -3)$ ، أما (C) فهي مصفوفة من الصنف (3×1) فيها $(c_{11} = 1)$، $(c_{21} = -1)$ $(c_{31} = 2)$ و(D) هي مصفوفة من الصنف (3×3) و(E) هي مصفوفة من الصنف (1×1) و (F) هي مصفوفة من الصنف (3×1) .

- ## المصفوفة القطرية (Diagonal Matrix):-

يقال للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ قطرية عندما تكون قيم كل عنصر من عناصرها لا يقع على القطر الرئيسي $[a_{ij} = 0 \ \ (i \neq j)]$ مساوياً للصفر.اما العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيكون احدها على الأقل مغايراً للصفر مثال على ذلك المصفوفتين G , H , R

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \ , \ H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ## المصفوفة العددية (Scalar Matrix):-

يقال للمصفوفة $A = [a_{ij}]$ بأنها مصفوفة عددية اذا كانت جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي متساوية $(a_{ij} = \mathrm{c})$ لكل $(i = j)$ وجميع العناصر المتبقية $(a_{ij} = 0)$ لكل $(i \neq j)$ مثال على ذلك المصفوفتان J , I

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ , J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الصفرية (Zero Matrix):-**

هي المصفوفة التي يكون كل عنصر فيها صفراً ويرمز لها عادةً O وتكون مرتبتها معتمدة على عدد عناصر صفوفها أو أعمدتها .

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الصفية(Row Matrix):-**

هي المصفوفة المكونة من صف واحد مثال على ذلك $R = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

- **المصفوفة العمودية(Column Matrix):-**

هي المصفوفة المكونة من عمود واحد مثال على ذلك $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

- **المصفوفة المربعة(Squar Matrix):-**

هي المصفوفة التي يكون عدد صفوفها مساوياً لعدد أعمدتها اي ان (m=n) ويقال عنها مصفوفة من المرتبة n أو سعة $(n \times n)$ $S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- **المصفوفة الذاتية او الأحادية(Identity Matrix):-**

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها التي لا تقع على القطر الرئيسي اصفاراً والعناصر التي فيها $(i = j)$ يساوي واحد . او نعرفها بصيغة اخرى بانها مصفوفة قطرية يكون فيها كل العناصر الواقعة على القطر الرئيسي واحد (1) . $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **المصفوفة المثلثية السفلى (Lower Triangular Matrix):-**

هي المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ في المرتبة n يقال لها مصفوفة مثلثية سفلى اذا كان $a_{ij} = 0$ لكل $i < j$ اي عندما تكون كل العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي تساوي صفراً.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المثلثية العليا (Upper Triangular Matrix):-**

هي المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ في المرتبة n يقال لها مصفوفة مثلثية عليا اذا كان $a_{ij} = 0$ لكل $i > j$ اي عندما تكون كل العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي تساوي صفراً.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **القطر الرئيسي (Main Diagonal):-**

يعرف القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة بأنة العناصر الواقعة على الخط او القطر الواصل بين الموقع للعنصر a_{11} والموقع للعنصر a_{mn} . حيث تمثل العناصر (**2 3 4**) القطر الرئيسي للمصفوفة M

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

- **القطر الثانوي (Secondary Diagonal):-**

يعرف القطر الرئيسي في المصفوفة المربعة بأنة العناصر الواقعة على الخط او القطر الواصل بين الموقع للعنصر a_{1n} والموقع للعنصر $a_{\mathrm{m}1}$. حيث تمثل العناصر (**2 3 0**) القطر الثانوي للمصفوفة M

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \mathbf{2} \\ 0 & \mathbf{3} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **جمع المصفوفات :-**

أذا كان كل من $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان من نفس الصنف $(m \times n)$ فأن **حاصل** جمع A , B هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ المعرفة بالصيغة التالية

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \le i \le m \ \& \ 1 \le j \le n)$$

اي اننا حصلنا على مصفوفة C بواسطة جمع العناصر المتناظرة في A و B

<u>مثال:-</u>

لتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فأن حاصل جمعهما يساوي

$$A + B = C = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4-4 \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- **طرح المصفوفات :-**

أذا كان كل من $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتان من نفس الصنف $(m \times n)$ فأن حاصل طرح A , B هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ المعرفة بالصيغة التالية

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1 \le i \le m \ \& \ 1 \le j \le n)$$

اي اننا حصلنا على مصفوفة C بواسطة طرح العناصر المتناظرة في A و B

<u>مثال:-</u>

لتكن $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ فأن حاصل طرحهما يساوي

$$A - B = C = \begin{bmatrix} 1-0 & -2-2 & 4+4 \\ 2-1 & -1-3 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

- **ضرب المصفوفات بعدد ثابت :-**

أذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من صنف $(m \times n)$ و (λ) عدد ثابت فأن حاصل ضرب المصفوفة A بالعدد الثابت λ يعرف كالأتي $\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})$

مثال:-

لتكن A المصفوفة التالية و $\lambda=4$ جد (λA) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$\lambda A = 4\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 2 & 4\times 1 & 4\times 4 \\ 4\times -3 & 4\times 0 & 4\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 16 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال:-

جد قيمة x, y, z اذا علمت ان $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & 2y+1 \\ -5z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -7 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

الحل:

$x = 5$, $y = -4$, $z = -2$

مثال:-

جد قيمة كل من a , b , c , d اذا كان

$$2\begin{bmatrix} a & -b \\ 3c & -2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 1 \\ c & 3+2d \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & a-b \\ a+b & 2c \end{bmatrix}$$

الحل:

واجب بيتي (H.W.)