## • ضرب المصفوفات فيما بينها:-

اذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الصنف $(m \times p)$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الصنف $(p \times n)$ فأن حاصل ضرب المصفوفة A في المصفوفة B هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ من الصنف $(m \times n)$ والمعرفة بالصيغة التالية

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \dots\dots\dots + a_{ip}b_{pi}$$

حيث $(1 \le i \le m \ \& \ 1 \le j \le n)$

يتبين من المعادلة اعلاه بأن العنصر $(i,j)$ في المصفوفة C (حاصل ضرب AB ) حُسب بواسطة جمع حاصل ضرب كل عنصر في الصف $i$ من المصفوفة A بالعنصر المناظر له في العموذ $j$ من المصفوفة B وعليه **فأن حاصل ضرب المصفوفتين AB يكون معرفاً فقط في حالة كون عدد صفوف المصفوفة B مساوياً الى عدد أعمدة المصفوفة A**

**مثال:-**

لتكن $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ , $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$ جد ناتج ضرب A.B

**الحل:**

$$A\,.\,B = \begin{bmatrix} (\mathbf{1})(-2) + (\mathbf{2})(4) + (\mathbf{-1})(2) & (\mathbf{1})(5) + (\mathbf{2})(-3) + (\mathbf{-1})(1) \\ (\mathbf{3})(-2) + (\mathbf{1})(4) + (\mathbf{4})(2) & (\mathbf{3})(5) + (\mathbf{1})(-3) + (\mathbf{4})(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$$

**مثال:-**

لتكن
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 4) \qquad\qquad (2 \times 3)$$

هل يمكن الحصول على ناتج لحالتين الضرب للمصفوفتين التالية (A.B) و (B.A)

**الحل:**

أن ناتج ضرب المصفوفتين بالصيغة (A.B) هي مصفوفة من الصنف $(2 \times 4)$ معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة A تساوي عدد صفوف المصفوفة B ، أما ضرب المصفوفتين بالصيغة (B.A) تكون غير معرفة لأن عدد أعمدة المصفوفة B لا تساوي عدد صفوف المصفوفة A

**مثال:-**

لتكن
$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 2) \qquad\qquad (2 \times 3)$$

هل يمكن الحصول على ناتج لحالتين الضرب للمصفوفتين التالية (A.B) و (B.A)

**الحل:**

أن ناتج حاصل الضرب (A.B) هي مصفوفة من الصنف $(2 \times 2)$

لأن $A.B = (\mathbf{2} \times 3).(3 \times \mathbf{2})$

أما ناتج حاصل الضرب (B.A) هي مصفوفة من الصنف $(3 \times 3)$

لأن $B.A = (\mathbf{3} \times 2).(2 \times \mathbf{3})$

$$A.B = \begin{bmatrix} (\mathbf{2} \times 5) + (\mathbf{-2} \times 2) + (\mathbf{3} \times -1) & (\mathbf{2} \times 6) + (\mathbf{-2} \times 4) + (\mathbf{3} \times 2) \\ (\mathbf{3} \times 5) + (\mathbf{0} \times 2) + (\mathbf{1} \times -1) & (\mathbf{3} \times 6) + (\mathbf{0} \times 4) + (\mathbf{1} \times 2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 10 - 4 - 3 & 12 - 8 + 6 \\ 15 + 0 - 1 & 18 + 0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

## • منقول المصفوفة (مبادلة المصفوفة) Transpose of Matrix:-

أذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الصنف $(m \times n)$ فأن المصفوفة $A^T = [a_{ij}{}^T]$ من الصنف $(m \times n)$ حيث

$$a_{ij}{}^T = a_{ji} \quad (1 \le i \le m \ \& \ 1 \le j \le n)$$

وتدعى منقولة المصفوفة A وعلية يمكن الحصول على منقول المصفوفة A بواسطة مبادلة الصفوف بالأعمدة للمصفوفة A

**<u>مثال:-</u>**

لتكن $A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ جد $A^T$

**<u>الحل:</u>**

$a_{ij}{}^T = a_{ji}$ نبدل الصفوف بالأعمدة فتتحول المصفوفة من صنف $A_{(2\times3)}$ الى صنف $A_{(3\times2)}$

$$A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 \\ \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{4} & 2 \end{bmatrix}$$

# تمارين

1- جد قيم المجاهيل (x , y , z) في كل مما يأتي:-

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x & 5 \\ -3y & 0 & -8z \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x+1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3 & 4 \\ 4y+1 & 5 \end{bmatrix}$

2- جد المصفوفة التي تحقق المعادلة التالية :-

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3- أذا كانت لديك المصفوفات التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, a = 2, b = -1, c = 3$$

برهن القوانين التالية:-

1) A+B=B+A
2) A+(B+C)=(A+B)+C
3) A(BC)=(AB)C
4) A(B+C)=AB+AC
5) (B+C)A=BA+CA
6) A(B-C)=AB-AC
7) (B-C)A=BA-CA
8) a(B+C)=aB+aC
9) a(B-C)=aB-aC
10) (a+b)C=aC+bC
11) (a-b)C=aC-bc
12) (ab)C=a(bC)
13) a(BC)=(aB)C=B(aC)

4- لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ برهن أن $AB \neq BA$

5- أذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

أحسب

a) A+B
b) A-B
c) 2A-3C
d) AB
e) BA
f) (AB)C
g) A(BC)
h) $A^T + B^T$
i) $B^T + A^T$
j) $(A^T)^T$