**Differentiable functions الدوال القابلة للإشتقاق**

 $f^{'}\left(z\_{0}\right)$تكتب بالشكل $z\_{0}$ عند $f$, فإن مشتقة الدالة $z\_{0}$ دالة معقدة معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة $f$ **تعريف.** لتكن

وتعرف بالمعادلة

$$(2) f^{'}\left(z\_{0}\right)=\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{z-z\_{0}} $$

بشرط أن الغاية موجودة.

 فإن $(2)$ في المعادلة $△z=z-z\_{0}$ إذا تحقق الشرط أعلاه فإذا وضعنا $z\_{0}$ قابلة للإشتقاق عند النقطة $f$ونقول الدالة

 يمكن إعادة صياغتها بالصورة $f^{'}\left(z\_{0}\right)$

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=\lim\_{△z⟶0}\frac{f\left(z\_{0}+△z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{△z}$$

 للمشتقة يكون معرفاً كالآتي $ \frac{dw}{dz} الرمز فإن △w=f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)$ $ ,w=f\left(z\right)$الآن لتكن

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=\frac{dw}{dz}=\lim\_{△z⟶0}\frac{△w}{△z}$$

 $.f^{'}\left(z\right)$ إستخدم التعريف لإيجاد $f\left(z\right)=z^{4}$**مثال:** لتكن

**الحل .**

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{z-z\_{0}} $$

$$ =\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{z^{4}-z\_{0}^{4}}{z-z\_{0}}=\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{\left(z-z\_{0}\right)(z+z\_{0})\left(z^{2}+z\_{0}^{2}\right)}{z-z\_{0}}$$

$$=4z\_{0}^{3} $$

 ومن الجدير بالذكر هنا أن خواص مشتقات $f^{'}\left(z\right)=4z^{3}$تكون $ z\_{0}$وبشكل عام فإن الصيغة النهائية للمشتقة بعد إسقاط

 حيث$△z$الدوال العقدية هي نفسها خواص مشتقات الدوال الحقيقية بالإضافة عند حساب الغاية فيجب أن ننتبه للقيم العقدية

 فإذا وجدنا مسارين مختلفين لهذه الغاية فإن الدالة العقدية تكون غير قابلة$△z⟶0$الغاية لهذه القيمة لاتعتمد على مسار

للإشتقاق وتوضيح ذلك في المثال الآتي:

 , اثبت أنها غير قابلة للإشتقاق .$f\left(z\right)=\overline{z}$**مثال:** إذا كانت الدالة

**الحل.**

 على طول الخط الموازي للمحور الحقيقي $z\_{0}$ ندرس الغاية لمسارين مختلقين للنقطة , فإذا كان الإقتراب الأول للنقطة

 , وعليه يكون $z=x+iy\_{0}$ فإن

$$\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{z-z\_{0}}=\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{f\left(x+iy\_{0}\right)-f\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}{\left(x+iy\_{0}\right)-\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}$$

$$ =\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{\left(x-iy\_{0}\right)-\left(x\_{0}-iy\_{0}\right)}{\left(x-x\_{0}\right)+i\left(y\_{0}-y\_{0}\right)}$$

$$ =\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{x-x\_{0}}{x-x\_{0}}=1$$

 وعليه يكون $z=x\_{0}+iy$ فإن $y$ على طول الخط الموازي للمحور التخيلي $z\_{0}$أما إذا كان الإقتراب للنقطة

$$\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{z-z\_{0}}=\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{f\left(x\_{0}+iy\right)-f\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}{\left(x\_{0}+iy\right)-\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}$$

$$ =\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{\left(x\_{0}-iy\right)-\left(x\_{0}-iy\_{0}\right)}{\left(x\_{0}-x\_{0}\right)+i\left(y-y\_{0}\right)}$$

$$ =\lim\_{\left(x+iy\_{0}\right)⟶\left(x\_{0}+iy\_{0}\right)}\frac{-i\left(y-y\_{0}\right)}{i\left(y-y\_{0}\right)}=-1$$

 غير قابلة للإشتقاق لإختلاف قيمة الغاية.$f\left(z\right)=\overline{z}$ومن أعلاه نجد أن

 إثبت أن المشتقة موجودة فقط عند الصفر $f\left(z\right)=\left|z\right|^{2}$**مثال:** لتكن الدالة العقدية المعرفة بدلالة القيم الحقيقية كالآتي

وليس في أي مكان آخر.

**الحل.**

$$(3) \frac{△w}{△z}=\frac{\left|z+△z\right|^{2}-\left|z\right|^{2}}{△z}=\frac{\left(z+△z\right)\left(\overline{z}+\overline{△z}\right)-z\overline{z}}{△z} $$

$$=\overline{z}+\overline{△z}+z\frac{\overline{△z}}{△z} $$

 على الترتيب$\overline{△z}=-△z , \overline{△z}=△z$وكما في المثال أعلاه وبنفس الإتجاهات إلى النقطة 0 يكون لدينا

 فإن $△z=\left(△x,0\right)$وعليه عندما يكون

$$\frac{△w}{△z}=\overline{z}+△z+z$$

 $△z=\left(0,△y\right)$وعندما

$$\frac{△w}{△z}=\overline{z}-△z-z$$

 فإن $△z⟶0$وهنا إذا كانت الغاية موجودة ووحيدة عندما

$$\overline{z}+z=\overline{z}-z$$

$\frac{△w}{△z}=\overline{△z} (3)$موجودة فإنه من العبارة $\frac{dw}{dz}$ولإثبات أن $z\ne 0$ غير موجودة عند $\frac{dw}{dz}$وعليه فإن

 موجودة.$\frac{dw}{dz}$ ونستنتج أن $z=0$وعندما

بينما هذه الدالة مستمرة عند كل نقاط المستوي لذلك الإستمرارية للدالة عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الإشتقاق للدالة بينما إذا $z\_{0}$ قابلة للإشتقاق عند $f\left(z\right)$كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنها مستمرة عند تلك النقطة ولبرهنة ذلك نفرض أن الدالة ونكتب هذا رياضياً كالآتي:

$$\lim\_{z⟶z\_{0}}\left(f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)\right)=\lim\_{z⟶z\_{0}}\frac{f\left(z\right)-f\left(z\_{0}\right)}{z-z\_{0}}\lim\_{z⟶z\_{0}}\left(z-z\_{0}\right)$$

$$ =f^{'}\left(z\_{0}\right)⋅0=0$$

$$ \lim\_{z⟶z\_{0}}f\left(z\right)=f\left(z\_{0}\right) أن نجد هذا ومن$$

. $z\_{0}$ عند نقطة $f$وهذا تعريف مكافئ للإستمرارية للدالة

**خواص الدوال القابلة للإشتقاق**

 , فإن $z$ دوال قابلة للإشتقاق عند النقطة $g, f$**نظرية .** لتكن كل من

$$\left(cf\left(z\right)\right)^{'}=cf^{'}\left(z\right) .1$$

$$\left(f\mp g\right)^{'}\left(z\right)=f^{'}\left(z\right)\mp g^{'}\left(z\right) .2$$

$$\left(fg\right)^{'}\left(z\right)=f^{'}\left(z\right)g\left(z\right)+f\left(z\right)g^{'}\left(z\right) .3$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}\left(z\right)=\frac{f^{'}\left(z\right)g\left(z\right)-f\left(z\right)g^{'}\left(z\right)}{\left(g\left(z\right)\right)^{2}} , g\left(z\right)\ne 0 .4$$

$$\left(f∘g\right)^{'}\left(z\right)=f^{'}\left(g\left(z\right)\right)g^{'}\left(z\right) .5$$

$$f^{'}\left(z\right)=0 فإن f\left(z\right)=c كانت إذا .6$$

$$f^{'}\left(z\right)=nz^{n-1} فإن f\left(z\right)=z^{n} كانت إذا .7$$

Cauchy-Riemann's Equations  **معادلتا كوشي – ريمان**

 للدالة العقدية$v,u$في هذا البند نحصل على زوج من المعادلات ذات المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال الحقيقية

 والتي تكون بالشكل الآتي:$z\_{0}$القابلة للإشتقاق عند

$$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$$

 والعالم الألماني A.L. Cauchyوهذا الزوج من المعادلات أكتشف سابقاً من قبل العالم الرياضي الفرنسي

. G.F. Riemann

$ △w=f\left(z\_{0}+△z\right)-f\left(z\_{0}\right) , △z=△x+i△y , z\_{0}=x\_{0}+iy\_{0}$ونبدأ بوضع

$$ =\left[u\left(x\_{0}+△x,y\_{0}+△y\right)-u\left(x\_{0},y\_{0}\right)\right]+i\left[v\left(x\_{0}+△x,y\_{0}+△y\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)\right]$$

 تعطى بالصورة الآتية: $f^{'}\left(z\_{0}\right)$لنفرض أن المشتقة

$$(4) f^{'}\left(z\_{0}\right)=\lim\_{△z⟶0}\frac{△w}{△z} $$

موجودة , لذلك يكون لدينا

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Re\frac{△w}{△z}\right)+i\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Im\frac{△w}{△z}\right)$$

 *بأي طريقة نختاره وبصورة خاصة إذا كان الأقتراب إلى*  $ \left(0,0\right)$ *تذهب إلى* $\left(△x,△y\right)$ومن خلال ما ورد أعلاه فإن

 *تصبح* $\frac{△w}{△z}$ *فإن* $\left(△x,0\right)$ *أفقياً خلال النقطة*  $\left(0,0\right)$

$$\frac{△w}{△z}=\frac{u\left(x\_{0}+△x,y\_{0}\right)}{△x}+i\frac{v\left(x\_{0}+△x,y\_{0}\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△x}$$

لذلك

$$\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Re\frac{△w}{△z}\right)=\lim\_{△x⟶0}\frac{u\left(x\_{0}+△x,y\_{0}\right)-u\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△x}=u\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

ويكون

$$\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Im\frac{△w}{△z}\right)=\lim\_{△x⟶0}\frac{v\left(x\_{0}+△x,y\_{0}\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△x}=v\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

 *نستنتج أن* $(4)$ *وبالتعويض في* $\left(x\_{0},y\_{0}\right)$ *عند النقطة* $x$ *هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير* $v\_{x},u\_{x}$حيث أن

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=u\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)+iv\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

 تصبح$\frac{△w}{△z}$ فإن $\left(0,△y\right)$ عمودياً خلال النقطة $△z⟶0$والآن وبنفس الطريقة بإمكاننا أن ندع

$$\frac{△w}{△z}=\frac{u\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-u\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{i△y}+i\frac{v\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{i△y}$$

$$=v\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)-i\frac{u\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-u\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△y}$$

لذلك يكون

$$\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Re\frac{△w}{△z}\right)=\lim\_{△y⟶0}\frac{v\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-v\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△y}=v\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

وأيضاً يكون

$$\lim\_{\left(△x,△y\right)⟶\left(0,0\right)}\left(Im\frac{△w}{△z}\right)=\lim\_{△y⟶0}\frac{u\left(x\_{0},y\_{0}+△y\right)-u\left(x\_{0},y\_{0}\right)}{△y}=-u\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

 *نستنتج أن* $(4)$ *وبالتعويض في* $\left(x\_{0},y\_{0}\right)$ *عند النقطة* $y$ *هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير* $v\_{y},u\_{y}$حيث أن

$$f^{'}\left(z\_{0}\right)=v\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)+iu\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

$$ =-i\left[u\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)+iv\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)\right]$$

 في كلتا الحالتين نستنتج أن $f^{'}\left(z\_{0}\right)$ومن قيم المشتقة

$$u\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=v\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right) , u\_{y}\left(x\_{0},y\_{0}\right)=-v\_{x}\left(x\_{0},y\_{0}\right)$$

(Cauchy-Riemann Equations)وهما معادلتي كوشي وريمان

ومن الممكن تلخيص النتائج التي حصلنا عليها أعلاه كالآتي من خلال إعطاء الشرط الضروري لتحقيق معادلتي كوشي ريمان .