**Analytic Functionsالدوال التحليلية**

 إذا كانت قابلة للإشتقاق عند كل نقاط $z\_{0}\in D$ يقال انها دالة تحليلية(هلومرفية) عند النقطة $f\left(z\right)$ **تعريف.** الدالة العقدية

*.*  *D* فإنهاتكون تحليلية ضمن المنطقة  *D* وإذا كانت تحليلية عند كل نقاط المنطقة $z\_{0}$جوارما للنقطة

 .(**Entire Function**) فإنها يقال عليها دالة كلية $z$ تحليلية عند كل نقاط المستوي $f\left(z\right)$وإذا كانت الدالة

 ليست تحليلية $f\left(z\right)=\left|z\right|^{2}$ تحليلية عند كل نقطة غير صفرية في المستوي المنتهي بينما الدالة $f\left(z\right)=\frac{1}{z}$**مثال:** الدالة وليس في أي مكان آخر.$z=0$عند كل نقطة لأن مشتقتها موجودة فقط عندما

 ولكنها تحليلية عند بعض نقاط أي جوار للنقطة $z\_{0}$ إذا كانت ليست تحليلية عند النقطة $f\left(z\right)$الان إعطاء تعريفا حيث أن الدالة . **(Singular Point)**  نقطة شاذة $z\_{0}$عندئذٍ تسمى النقطة $ z\_{0}$

**مثال 33:**

 لهما مشتقات جزئية $f\left(z\right)$ إذا وفقط إذا كان الجزء الحقيقي والتخيلي من *D* تكون دالة تحليلية في مجال $f\left(z\right)$ **نظرية**.

*.D*مستمرة من الرتبة الأولى وتحقق معادلتي كوشي-ريمان عند جميع نقاط

 **مثال 34 :**

 دالة كلية.$f\left(z\right)=e^{y}\cos(x)-ie^{y}\sin(x)$**مثال 35:**  إثبت أن الدالة

**الحل .** نجد المشتقات الجزئية للدالتين

$$u\_{x}=-e^{y}\sin(x) , u\_{y}=e^{y}\cos(x)$$

$$v\_{y}=-e^{y}\sin(x) , v\_{x}=-e^{y}\sin(x) $$

 بالإضافة إلى انها تحقق معادلتي كوشي-ريمان عند كل نقاط المستوي وبالتالي تكون $z$وهذه الدوال الحقيقية مستمرة لكل قيم تحليلية عند كل نقط المستوي لذلك فهي دالة كلية .

**مثال :**

 تحليلية عندها حيث $f\left(z\right)$**مثال:** حدد النقاط التي تكون الدالة

$$f\left(z\right)=\overline{z}e^{-\left|z\right|^{2}}$$

 كالاتي:$f\left(z\right)$**الحل .** نعيد كتابة الدالة
$$f\left(z\right)=\left(x-iy\right)e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}$$

 كالآتي:$v,u$ومنها تكون الدوال الحقيقية

$$u\left(x,y\right)=xe^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)} , v\left(x,y\right)=-ye^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}$$

الآن نجد مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى

$$u\_{x}=e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}-2x^{2}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)} , u\_{y}=-2xye^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}$$

$$v\_{x}=2xye^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)} , v\_{y}=-e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}+2y^{2}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}$$

بالنظر إلى قيم المشتقات أعلاه غير أن

$$u\_{y}=-v\_{x}$$

 فقط عندما يكون $u\_{x}=v\_{y}$بينما

$$2e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}-2x^{2}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}-2y^{2}e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}=0$$

$$ 2e^{-\left(x^{2}+y^{2}\right)}\left(1-x^{2}-y^{2}\right)=0 أو$$

$x^{2}+y^{2}=1$لذلك يكون لدينا

 $\left|z\right|=1$ تحليلية فقط على الدائرة $f\left(z\right)$ مستمرة لذلك نستنتج أن $v\_{y}, u\_{y}, v\_{x}, u\_{x}$وبما أن جميع المشتقات الجزئية

**مثال:**

 تكون ثابتة. $f\left(z\right)$ في هذا المجال فإن $f^{'}\left(z\right)=0 $ وأن $D$ تحليلية عند مجال $f\left(z\right)$ **نظرية .** إذا كانت الدالة

 , عكس هذا أي أن $f=0 فإن \left|f\left(z\right)\right|=0 كانت فإذا f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$**البرهان .**  لتكن

$$\left|f\left(z\right)\right|^{2}=u^{2}+v^{2}≡c\ne 0$$

 $uu\_{y}+vv\_{y}=0 , uu\_{x}+vv\_{x}=0 $ يكون $y$ $,x$بأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لـ

وبما أن الدالة تحليلية فهي تحقق معادلتي كوشي-ريمان لذلك نجد

$$uu\_{x}-vu\_{y}=0 , vu\_{x}+uu\_{y}=0$$

$\left(x^{2}+y^{2}\right)u\_{x}=0 , \left(x^{2}+y^{2}\right)u\_{y}=0 $وعليه يكون

$u\_{x}=u\_{y}=0 $وهنا نستنتج أن

$v\_{x}=v\_{y}=0 $وكذلك بنفس الطريقة نستنتج أن

 دالة ثابتة. $f$وبالتالي تكون الدالة

 $D$ يجب أن تكون ثابتة خلال المجال $f\left(z\right)$ فإن $D$ كلاهما تحليلية عند المجال $\overline{f\left(z\right)}, f\left(z\right) $**مثال.** إثبت أن إذا كانت

$f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$**الحل .**  لتكن

$\overline{f\left(z\right)}=U\left(x,y\right)+iV\left(x,y\right)$فتكتب

$ \left(5\right) U\left(x,y\right)=u\left(x,y\right), V\left(x,y\right)=-v\left(x,y\right)$حيث

 تحليلية $f\left(z\right)$وبما أن الدالة

 أي أن $D$إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان في المجال

$$\left(6\right) u\_{x}=v\_{y} ; u\_{y}=-v\_{x} $$

 تحليلية , إذن نستنتج أن $\overline{f\left(z\right)}$*ومن كون الدالة*

$$\left(7\right) U\_{x}=V\_{y} ; U\_{y}=-V\_{x} $$

 *نجد أن* $(7), (6)$*بالنظر للعلاقات*

$$(8) u\_{x}=-v\_{y} ; u\_{y}=v\_{x} $$

. $D$ في المجال $u\_{x}=0$ بما يقابلها نستنتج $(8),(6)$بجمع المعادلتين

 $v\_{x}=0$ بما يقابلها نجد $(8),(6)$وكذلك بطرح المعادلتين

 وبإستخدام النظرية (2-10) فإن الدالة تكون ثابتة .$f^{'}\left(z\right)=u\_{x}+iv\_{x}=0+i0=0 $لذلك

**مثال** : برهن ان الداله

 .