**(Harmonic Function) الدالة التوافقية**

في هذا البند سنعرض نتيجة أخرى لمعادلتي كوشي-ريمان والتي تعتبر من المواضيع المهمة في الرياضيات التطبيقية في دراسة حركة الموائع , الجهود الكهربائية والمغناطيسية ودرجة الحرارة الثابتة والجاذبية وهذه النتيجة يمكن استنتاجها من قابلة للإشتقاق من الرتبة الثانية وكما يلي :معادلتي كوشي-ريمان بفرض أن الدوال الحقيقية

ومنها يكون لدينا

ومنها يكون وبنفس الطريقة

وبالجمع نستنتج أن

وبالمقابل أيضاً من معادلتي كوشي-ريمان يكون لدينا

وبالطرح نستنتج أن

. Laplace نسبة إلى العالم الفيزيائي (Laplace’s Equation) وهذه المعادلات تسمى معادلة لابلاس

دالة توافقية يقال للدالة معرفة في المجال دالة قيم حقيقية في المتغيرين الحقيقيين **تعريف .** لتكن

إذا كانت مشتقاتها الجزئية الأولى والثانية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس : في المجال (Harmonic)

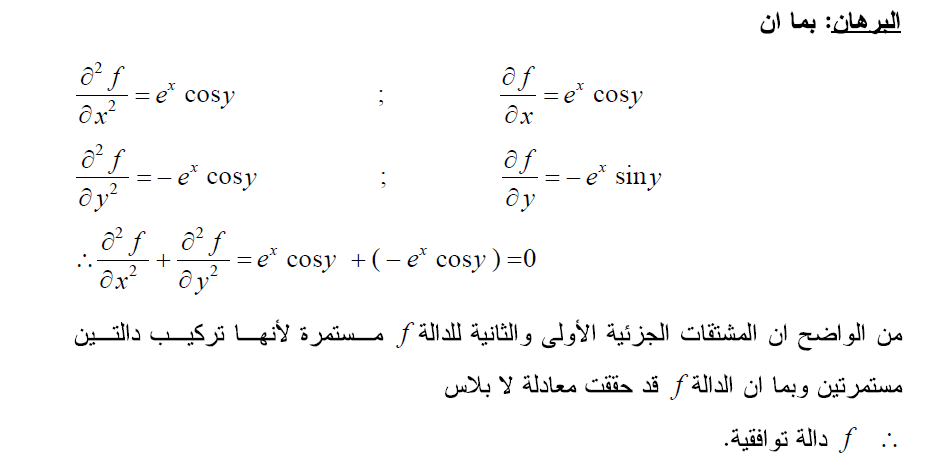
موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لأن دالة توافقية في أي مجال **مثال 42:** الدالة

لابلاس ولتوضيح ذلك

الآن

**مثال:** اثبت ان الداله

داله توافقيه



وكانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية دالة تحليلية في المجال **نظرية:**اذا كانت

دوال توافقية في مستمرة فإن لكل من

دالة تحليلية إذن تكون معادلتي كوشي-ريمان متحققة أي أن **البرهان .** بما أن

نحصل على فإذا قمنا باشتقاق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير

لنحصل على وبنفس الطريقة نشتق العلاقة أعلاه بالنسبة للمتغير

مستمرة , لذلك بإستخدام نظرية في التفاضل والتكامل للدوال وبما أن جميع المشتقات الجزئية

الحقيقية التي تتحدث عن تساوي المشتقات الجزئية , أي أن

لذلك ينبع من هذا أنه

وكذلك

وبهذا ينتهي البرهان.

ومشتقاتهم الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق دوال توافقية في المجال واذا كانت **تعريف.**لتكن

. يسمى مرافق توافقي لـ فإن معادلتي كوشي-ريمان في

وعليه يكون فإن **مثال:** لتكن

هي أيضاً دالة توافقية وكذلك دالة توافقية وكذلك نجد أن

تعطى بالصورة والدالة مرافق توافقي للدالة وبالتالي يكون و

الآتية

. مرافق توافقي للدالة إذا وفقط إذا كان تحليلية في المجال **نظرية .**الدالة

. دالــة تحليــلية في , إذن باستخدام النظرية السابقة تكون في المجال مرافق توافقي للدالة **البرهان .** إذا كان

دوال توافقية حسب النظرية السابقة بالإضافة إلــى إذن يكون دالة تحليلية في ولبرهنة الإتجاه الثاني , إذا كانت

ذلك معادلتي كوشي-ريمان متحققة .

. ثم جد ما عدا دالة توافقية لكل الأعداد **مثال:**إثبت أن الدالة الحقيقية .

فيكون لدينا بالنسبة لكلا المتغيرين **الحل .** في البداية نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة

وبالجمع نحصل على

دالة توافقية ,إذن الدالة

هو المرافق التوافقي وعليه من معادلتي كوشي-ريمان نحصل على ولإيجاد المرافق التوافقي لها , نفرض أن

نحصل على بالنسبة للمتغير وبتكامل العلاقة

.  *تمثل ثابت التكامل بالنسبة للمتغير*  حيث

*وذلك باستخدام المعادلة الثانية من معادلتي كوشي-ريمان حيث أن* لذلك يجب أن نجد قيمة

*دالة ثابتة ولتكن قيمتها تساوي لذلك تكون* وبالمقارنة فإن قيمة

معرفة كالآتي لذلك يكون المرافق

والدالة التحليلية المقابلة هي

*نستنتج أن , نضع* ولإيجادها بدلالة

وبصورة عامة لإيجاد المرافق التوافقي لأي دالة توافقية نستخدم النظرية القادمة .

فإنه يوجد مرافق توافقي دالة توافقية عند جوار النقطة التي مركزها **نظرية:** ليكن

دالة تحليلية . معرف على هذا الجوار وأن

دوال توافقية , إذن تحقق معادلتي كوشي-ريمان **البرهان .** بما أن

بخطوتين رئيسيتين :والآن نستطيع أن نجد المرافق التوافقي

والتي استنتجناها من الخطوة الأولى , نكامل الدالة

فيكون لدينا نكاملها بالنسبة إلى

*فقط . دالة تعتمد على المتغير* حيث

*في بقيمة ونعوض قيمة بالنسبة للمتغير باشتقاق المعادلة* أما الخطوة الرئيسية الثانية فهي إيجاد

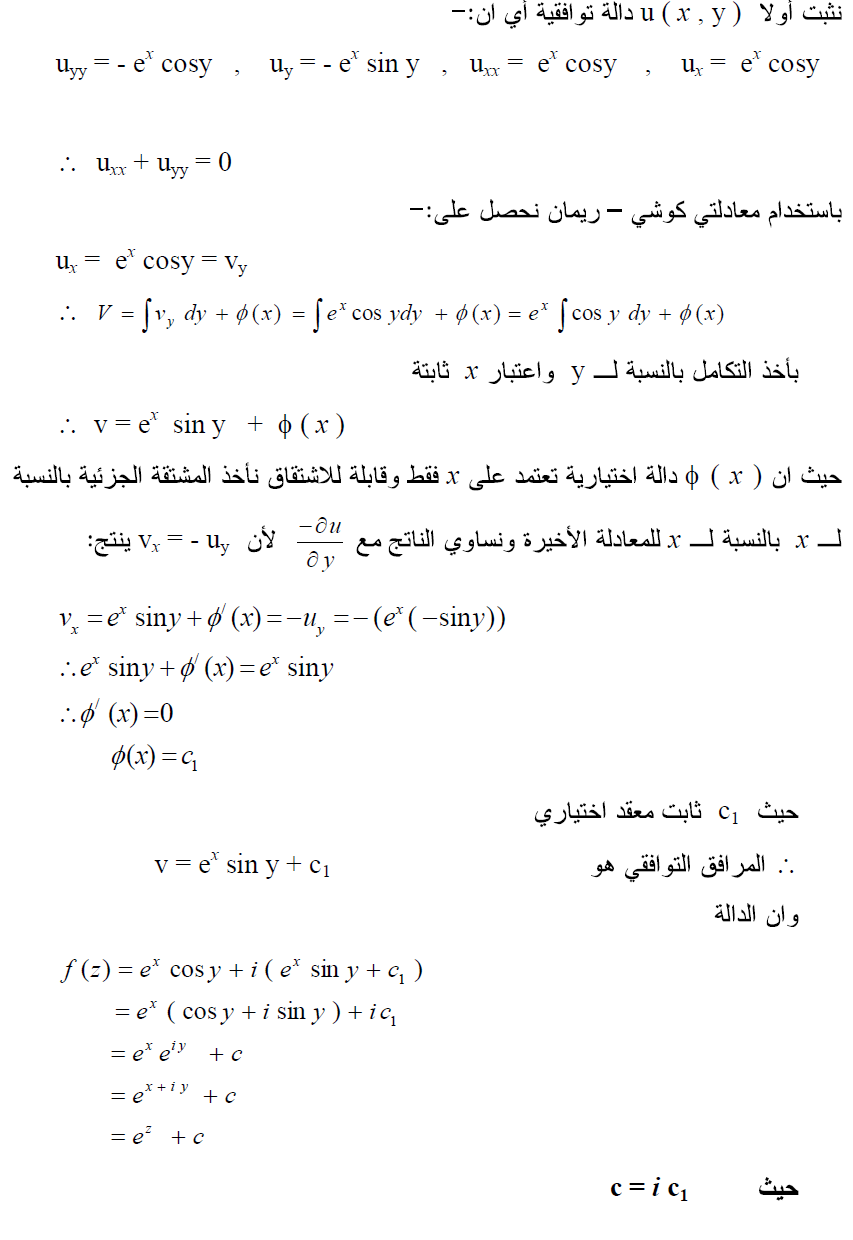
الطرف الأيسر فنحصل على

ثم نكامل الدالة تحذف ما عدا الحدود التي تعتمد على المتغير دالة توافقية فإن جميع حدود *وبما أن*

ذات المتغير المفرد لإيجاد قيمة

(المرافق التوافقي).وهذه الخطوات أساسية لإيجاد

**مثال** :جد مرافق توافقيا

الحل:

***Homework***

1. اذا كانت اوجد قيمة كل ماياتي

ا- ب-

1. اكتب الداله الاتية بالصيغة
2. *اذا كانت ، استخدم الاحداثيات القطبية لايجاد*

*ا- ب-*

1. *عبر عن الدالة الاتية بالصيغة*

1. *اوجد صورة القرص عندما*
2. *اثبت ان صورة العمود هي القطع المكافئ تحت تأثير التطبيق*
3. *احسب الغايات الاتية ان وجدت*

*ا- ب*-

1. استخدم التعريف لاثبات ان

ا

1. لتكن

باستخدام التعريف ابت ان

1. لتكن حيث ولتكن اثبت ان مستمرة لكل قيمفي المستوي العقدي
2. لتكن ،استخدم تعريف المشتقة لاثبات ان
3. استخدم معادلتي كوشي ريمان لاثبات ان الدوال الاتية قابلة للاشتقاق لكل قيم ثم استنتج

ا- ب-

1. اثبت انه اذا كانت دالتان تحليليتان في مجال ما فان دالة ثابتة.
2. ناقش الدالة الاتية من حيث قابليتها للاشتقاق وتحليلية

1. *جد الدالة التحليلية بايجاد المرافق التوافقي للدالة الحقيقية*

*ا- ب-*

1. *اذاكان مرافق توافقي للدالة ،اثبت ان مرافق توافقي للدالة*
2. *اذاكان مرافق توافقي للدالة ،اثبت ان دالة وافقية.*
3. *باستخدام الشكل القطبي لمعادلتي كوشي ريمان ،بين ان الدالة تحليلية في المجال*