**Trigonometry and Hyperbolic Functions الدوال المثلثية والزائدية .**

الدوال المثلثية ( جيب الزاوية وجيب تمام الزاوية وظل الزاوية و... إلخ ) في المتغيرات العقدية لا تلعب نفس الدور البارز

كما هي الحال في الدوال الحقيقية لذلك نستطيع تعريفها بمجرد تركيبات خاصة من الدوال الأسية .

**تعريف .**  دالة الجيب الجيب تمام للمتغير العقدي تعرف كالآتي:

هذه الدوال هي دوال كلية لأنها تركيب من دوال كلية حيث أنهكما معروف لدينا

بجمع هاتين المعادلتين ينتج لنا

ومنه

وكذلك عند طرح المعادلتين ينتج لنا

إذن

ومنها نستطيع الحصول على كل الدوال المثلثية الأخرى.

هناك خواص لهذه الدوال تشبه الخواص في المتغيرات الحقيقية التي درست سابقاً وكذلك بعض الخواص التي تتميز بها الدوال المثلثية ذات المتغيرات العقدية عن مثيلتها في الدوال الحقيقية التي سنذكرها الان .

 وذلك لأن دالتان دوريتان بحيث دورة كل منهما أ. الدالتان

 وبنفس الطريقة نثبت أن

 في المستوي العقدي لذلك تكون دالتان كليتان ومشتقاتهما تعطى دالتان تحليليتان في كل قيم ب. الدالتان

 بالعلاقة

 وبنفس الطريقة نثبت أن

 إذا وفقط إذا كان ج. الدالة

 إذا وفقط إذا كان وكذلك الدالة

د.

 لإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية:

 وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية .

هـ.

 دالتين غير مقيدة في المستوي العقدي بينما في الدوال الحقيقية القيمة من هاتين العلاقتين يتبين لنا أن الدالتين

 ولتوضيح ذلك سنبرهن في البداية العلاقتين أعلاه حيث أقل او يساوي 1 لكل قيم المطلقة لـ

وبما أن

لذلك نحصل على

وبنفس الطريقة نثبت العلاقة الثانية.

 في العلاقة الأولى ولندع الان إذا وضعنا

فإن

 وهذا من أهم ما يميز به الدوال المثلثية دالة غير مقيدة وهذا ينطبق على وهذا يوضح ما ذكرناه آنفاً أن

 العقدية عن مثيلاتها ذات القيم الحقيقية .

 حيث أن تعريفها كما هو في المتغيرات الحقيقية أي أن والآن سنعرف الدوال المثلثية الزائدية في المستوي العقدي لأي عدد

 أيضا دوال كلية ومشتقاتها تعطى بالعلاقة الآتية: دوال كلية لذلك تكون وبما أن

ومنها نستنتج تعريف بقية الدوال المثلثية الزائدية . ومن ميزات هذه الدوال عن الدوال ذات المتغيرات الحقيقية تكون

 حيث أن دالتان دوريتان دورة كل منهما هي الدالتان

.وكذلك بنفس الطريقة بالنسبة للدالة

أما بقية المتطابقات المعروفة في المجال الحقيقي تصح في المجال العقدي ولكن في المجال العقدي يوجد إرتباط بين الدوال الزائدية المثلثية العقدية والحقيقية فمثلاً نلاحظ أن

أ.

ب.

ج.

وبرهان هذه الخواص تترك كتمرين للطالب.

**مثال:** إثبت أن

**الحل :** من الواضح لدينا

 لذلك يكون لدينا والدالة وبما ان الدالة

وبهذا نستنتج أن

**مثال:** اثبت ان

*الحل: من الواضح لدينا*

وبهذا نستنتج أن