Poles ,Zeroes and Singular points  **النقاط الشاذة والأصفار والأقطاب**

إعادة تعريف النقطة الشاذة وهي تلك النقطة التي تكون الدالة عندها غير تحليلية وتقسم إلى قسمين النقطة الشاذة المعزولة وغير المعزولة .

 لايحوي على $0<\left| z-z\_{o}\right|<ε$ بحيث يكون الجوار $ε>0$معزولة إذا وجد $ z\_{o}$**تعريف.** تسمى النقطة الشاذة

 نقطة شاذة غير معزولة بمعنى آخر تكون هناك عدد غير منته من$ z\_{o}$أما إذا لم يتحقق هذا فإن $ z\_{o}$نقاط شاذة أخرى غير

النقاط الشاذة للدالة.

 .Isolated **ملاحظــــة**. إذا كانت النقاط الشاذة معدودة منتهية فالنقطة الشاذة تكون معزولة

**مثال.** الدالة

$$f\left(z\right)=\frac{z+1}{z\left(z^{2}+4\right)}$$

 وهذه النقاط معزولة.$z=\mp 2i , z=0 $لها نقاط شاذة هي

**مثال .** الدالة

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\sin(\left(\frac{1}{z}\right))}$$

لها نقاط شاذة غير معزولة ولمعرفة ذلك دعنا نجد هذه النقاط كالآتي

$$\sin(\left(\frac{1}{z}\right))=0⟹\frac{1}{z}=πn$$

$z\_{n}=\frac{1}{πn} , n=0,\mp 1,\mp 2,…$وهذا يؤدي إلى أن

 $z\_{n}=πn $ لحصلنا على $z$ بمكان $\frac{1}{z}$ نقطة شاذة غير معزولة وإذا وضعنا $z=0 $لهذا فإن

 لذلك تكون نقطة شاذة غير معزولة .$\infty $ فإنه يوجد هناك نقاط شاذة لذلك لا نستطيع عزل $\infty $ومهما أخذنا جوار للغاية

 مع متسلسلة لورانت $a $ نقطة شاذة معزولة $f$**تعريف .** لتكن للدالة

$$f\left(z\right)=\sum\_{n=-\infty }^{\infty }c\_{n}\left(z-a\right)$$

لذلك يمكن تصنيف هذه النقطة كالاتي :

) Removable ). $a$ لها نقطة شاذة قابلة للإزالة عند $f$ فإن $n=-1,-2,… $ لكل $c\_{n}=0 $**أ -** إذا كان

 لها قطب $f$ فإن $n=-k-1,-k-2,…$ لكل $c\_{n}=0$ , $c\_{-k}\ne 0$ عدد صحيح موجب بحيث أن $k$**ب-** لكل (Simple pole). لها قطب بسيط .$f$ فإن $k=1$ وإذا كان $a$ عند $k$ من الرتبة

(Essentially) $.a$ لها نقطة شاذة أساسية عند $f$ فإن $n$ لكل عدد صحيح سالب غير منتهٍ $c\_{n}\ne 0$**جـ-** إذا كان

 دالة معرفة كالآتي $f\left(z\right)$**مثال .** لتكن

$$f\left(z\right)=\frac{z^{2}-1}{z+1}$$

 نقطة شاذة.$z=-1$نلاحظ أن

وإذا كتبنا

$$f\left(z\right)=\frac{\left(z-1\right)\left(z+1\right)}{z+1}=z-1$$

 نقطة شاذة قابلة للإزالة .$z=-1$فعليه تكون النقطة الشاذة

 دالة معرفة كالآتي $f\left(z\right)$**مثال .** لتكن

$$f\left(z\right)=\frac{\cos(2z)-1}{z^{2}}$$

 , متسلسلة لورانت لهذه الدالة تكون كالآتي $z=0$النقطة الشاذة المعزولة

$$f\left(z\right)=\frac{1}{z^{2}}\left(-\frac{4z^{2}}{2!}+\frac{16z^{4}}{4!}-\frac{64z^{6}}{6!}+…\right)$$

$$=-2+\frac{2z^{2}}{3}-\frac{64z^{4}}{6!}+… $$

 قابلة للإزالة .$z=0$لذلك تكون النقطة الشاذة

**مثال.** لتكن

$$f\left(z\right)=e^{-\frac{1}{z}}$$

 تكون أساسية وذلك لأن $z=0$النقطة الشاذة

متسلسلة لورانت للدالة هي

$$e^{-\frac{1}{z}}=\sum\_{n=0}^{\infty }\frac{\left(-1\right)^{n}z^{-n}}{n!}$$

 نقطة شاذة أساسية .$z=0$ فإن $n=-1,-2,… $ لكل $c\_{n}\ne 0$وبما أن

 فإن $n=0,1,…,k-1$ إذا كان لكل $a$ عند النقطة $k$ يقال لها تملك صفراً من الرتبة $f\left(z\right)$**تعريف .**الدالة التحليلية

 $f^{k}\left(a\right)\ne 0 و f^{n}\left(a\right)=0 $

 لها صفراً بسيطاً.$f$ فإن $k=1 $وإذا كان

 $g\left(z\right)$ إذا وفقط إذا وجدت دالة $k$ فإنه يوجد لها صفر من الدرجة (الرتبة) $z\_{o}$دالة تحليلية عند $f\left(z\right)$**نظرية .** لتكن

 وتحقق$g\left(z\_{o}\right)\ne 0$ بحيث $z\_{o}$عند

$$f\left(z\right)=\left(z-z\_{o}\right)^{k}g\left(z\right)$$

 وهذا يعني $z\_{o}$ فإنه يوجد لها متسلسلة تايلور تقترب عند $z\_{o}$ تحليلية عند $f\left(z\right)$**البرهان .** بما أن الدالة

$$f\left(z\right)=\sum\_{n=0}^{\infty }c\_{n}\left(z-z\_{o}\right)^{n}$$

 فإن $k$ صفر للدالة من الرتبة $z\_{o}$وإذا كانت

$$f\left(z\_{o}\right)=f^{'}\left(z\_{o}\right)=…=f^{k-1}\left(z\_{o}\right)=0, f^{k}\left(z\_{o}\right)\ne 0$$

وبالتالي تصبح المتسلسلة

$$f\left(z\right)=c\_{k}\left(z-z\_{o}\right)^{k}+c\_{k+1}\left(z-z\_{o}\right)^{k+1}+…$$

$$=\left(z-z\_{o}\right)^{k}\sum\_{n=0}^{\infty }c\_{k+n}\left(z-z\_{o}\right)^{n}$$

 فإن $g\left(z\right)=\sum\_{n=0}^{\infty }c\_{k+n}\left(z-z\_{o}\right)^{n}$فإذا وضعنا

$$f\left(z\right)=\left(z-z\_{o}\right)^{k}g\left(z\right)$$

الإتجاه الثاني في البرهان (يترك كتمرين للطالب)